Form 2 Answer

填充題

1. $BC = 10$, $\frac{AD \times 10}{2} = \frac{8 \times 6}{2}$ & $AD = 4.8$ or $\frac{24}{5}$

2. Answer is 3

解. 由 $a = \frac{7}{2\sqrt{15}}$ 可計算得 $\sqrt{4a^2+1} = \sqrt{\frac{49}{15}+1} = \frac{8}{\sqrt{15}}$ ， 從而

$$2a + \sqrt{4a^2+1} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

類似地，由 $b = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ 可計算得 $\sqrt{b^2+1} = \sqrt{\frac{1}{15}+1} = \frac{4}{\sqrt{15}}$ ， 從而

$$b + \sqrt{b^2+1} = \frac{3}{\sqrt{15}}$$

由此得

$$\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right)\left(b + \sqrt{b^2+1}\right) = \sqrt{15} \cdot \frac{3}{\sqrt{15}} = 3$$

3. $\frac{24 \times 70 + (40-24) \times 75}{40} = 72$

4. $ab - a - b = 6$ and $ab - a - b + 1 = 6 + 1 = 7$

Hence $(a-1)(b-1) = 7$ and we obtain the following cases:

1. $a-1=7$ and $b-1=1$
2. $a-1=1$ and $b-1=7$
3. $a-1=-1$ and $b-1=-7$
4. $a-1=-7$ and $b-1=-1$

Then $(a,b) = (8,2)$, $(2,8)$, $(0,-6)$ or $(-6,0)$.

The possible values of ab are 0 and 16.

Hence the answer is 0 + 16 = 16.

5. $\dfrac{1}{101\times 102}+\cdots+\dfrac{1}{2021\times 2022}=\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{102}+\dfrac{1}{102}-\dfrac{1}{103}+\cdots+\dfrac{1}{2021}-\dfrac{1}{2022}=\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{2022}$

Hence the answer is $\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{2022}=\dfrac{1921}{204222}$.

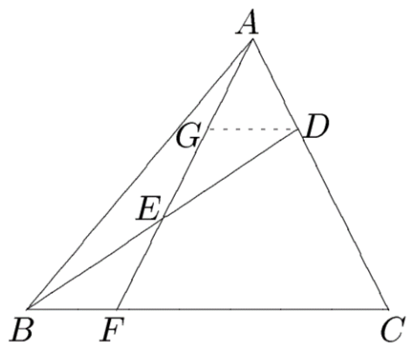
6. $\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x=1$

The answer is 1.

7. Let $BP=x$. By reflection, $AP+PD$ is minimum when $\dfrac{4}{x}=\dfrac{6}{10-x}$.

Hence $x=4$ and the answer is $\sqrt{4^2+4^2}+\sqrt{6^2+6^2}=10\sqrt{2}$.

8. 過D作DG平行於BC與AF交於G，則$\Delta DGE\cong\Delta BFE$，從而$GE=EF$。



又$\Delta AGD\backsim\Delta AFC$，故 $\frac{AG}{AF}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，所以 $AG=GE$。由此可知ΔAGD的面积＝ΔDGE的面积＝ΔBEF的面积＝30

再由E是BD的中點可見

$$\Delta ABD\text{的面积}=2\times\Delta AED\text{的面积}=2\times(30+30)=120$$

而$AD=\frac{1}{3}AC$，故

$$\Delta ABC\text{的面积}=3\Delta ABD\text{的面积}=3\times 120=360$$

答案. 360

解答題

1. $x \ge y \ge z$ ，則$-1 = 2x^3 - y^2 - 2y \ge 2z^3 - x^2 - 2x = -1$，所以 $x = y = z$ ，方程化為

$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ， $(2x-1)(x^2-1) = 0$ 。

答案. $x = y = z = 1$或-1或$\frac{1}{2}$

Remarks: $2x^3 + 2 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \ge 0$, $x \ge -1$ & $x + 1 \ge 0$

Similarly, $y+1 \ge 0$ and $z+1 \ge 0$ and therefore $x+1 \ge y+1 \ge z+1 \ge 0$

Hence $(x+1)^2 \ge (y+1)^2$ and $-y^2 - 2y \ge -x^2 - 2x$

2. Rotate ΔAPB and ΔBPC about point B so that A and C meet at X.
   (a) Then $\angle APB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
   (b) Area is $\frac{1}{2}\left(\frac{6\times 8}{2}\times 3 + \frac{1}{2}\times 8\times 8\times \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\times 10\times 10\times \sin 60^\circ\right) = 36 + 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

3. **解.** B 隊輸一場最多得 9 分。A 隊未輸過，且勝 B 隊一場，A 隊最少得 6 分，最多得 8 分。若 10 場比賽都有勝負，得分總和應是 30 分，但現只有 25 分, 所以 10 場比賽中有 5 場是平局。
   1) 若 A 隊得 8 分，則 B 隊的得分必為 9 分, 這樣 A 隊勝 2 場平 2 場, B 隊勝 3 場負 1 場, A,B 兩隊得分和為 17 分，從而 C,D,E 三隊得分的和必為 8 分; 但因最低分是 2 分，C,D,E 三隊得分的和不小於$2+3+4=9>8$, 這個矛盾說明 A 隊不可能得 8 分
   2）由於 A 隊勝了 B 隊得 3 分，且沒輸過，另外 3 場不可能共得 4 分, 故 A 隊不可能得 7 分。由上所述可見 A 隊得 6 分(勝 1 場平 3 場)。
   3）B 隊負 1 場，不可能得 8 分。若 B 隊得 7 分（負 1 場勝 2 場平 1 場)，則 C,D,E 三隊得分數的和是 12，由於得分互不等，第三名不能得 6 分, 而$5+4+2=11<12$所以 B 隊不可能得 7 分。因此 B 隊得 9 分。
   4）這樣 A, B 兩隊共得 15 分, 所以 C,D,E 三隊共得 10 分，由於最低分是 2 分且得分互不相同, 只能是一個隊得 2 分, 一個隊得 3 分, 一個隊得 5 分。這樣第三名得 5 分。

答案. 5 分

建模計算題

這個程式是給出一個數列，其中第 i 個數是第 i-1 個數的兩倍減去第 i-2 個數的差，輸入的 n 和 m 分別作為數列裡第 1 個和第 2 個數. 當輸入是 2、5 時，該數列是：2、5、8、11、14...，不難看出這是一個公差為 3 的等差數列（這也可以通過推導得出），程式輸出的第 98 個數實際上是數列中的第 100 個數，由此不難算出它等於 299.

答案. 299