

2022 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽 (決賽)

中二組試卷

日期：2022 年 12 月 10 日

一小時三十分鐘完卷 (10:00 am – 11:30 am)

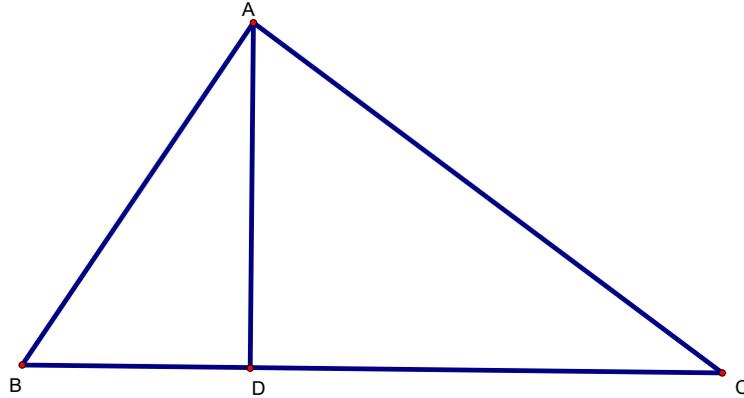
比賽須知：

1. 全卷共 12 題，包括甲部填空題 8 題，每題 10 分；乙部解答題 3 題，每題 20 分；丙部建模計算題 1 題 20 分，總分 160 分。
2. 參賽學生必須全部作答，乙部及丙部的答案寫在答題紙上。
3. 甲部填空題無須書寫步驟及單位，只須在電腦系統上輸入數字；乙部解答題則須寫出詳細解答過程或步驟，完成乙部及丙部的題目後，須拍照上傳到指定系統上。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器，違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有試題、答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生必須在本試卷和答題紙上填寫以下資料：編號、學生姓名及學校名稱。(請依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

| 編號 | 學生姓名 | 學校名稱 |
|----|------|------|
| | | |

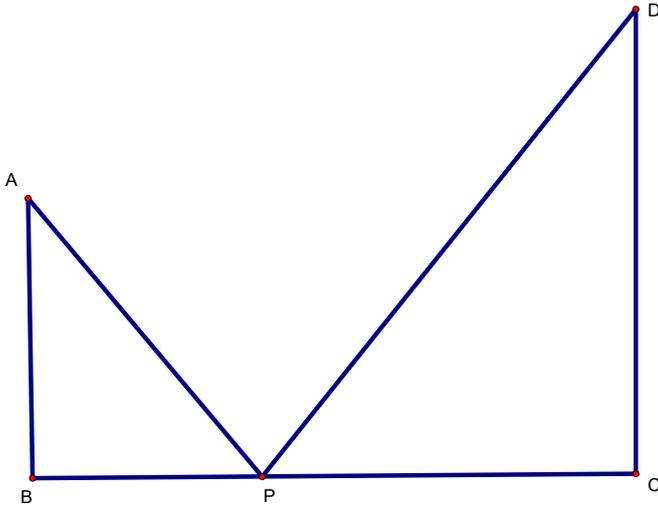
甲部：填充題 (共八題，每題 10 分，共 80 分)

1. 設 ABC 為一直角三角形且 $AC = 6$ ， $AB = 8$ 及 $\angle BAC = 90^\circ$ 。 D 為 BC 上的一點且 $AD \perp BC$ ，求 AD 。(答案必須以小數表示)

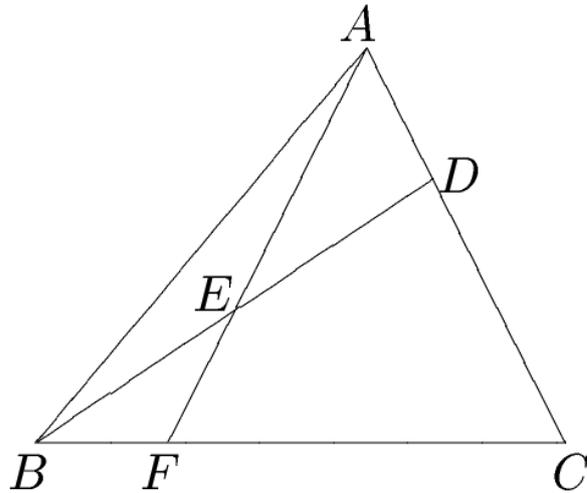


2. 設 $a = \frac{7}{2\sqrt{15}}$ 及 $b = \frac{-1}{\sqrt{15}}$ 。計算 $(2a + \sqrt{4a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})$ 。
3. 一班共有 40 位學生，其中男生有 24 人。已知男生及女生在數學測驗的平均分分別為 70 分及 75 分。求全班學生的平均分。
4. 已知 a 及 b 同是整數，且 $ab - a - b = 6$ 。求 ab 所有可能的數值之和。
5. 求 $\frac{1}{101 \times 102} + \frac{1}{102 \times 103} + \dots + \frac{1}{2021 \times 2022}$ 的值。
6. 求 $\cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x$ 的值，其中 x 為一實數。

7. 如下圖所示， $AB \perp BC$ 及 $CD \perp BC$ 。已知 $AB = 4$ 、 $CD = 6$ 及 $BC = 10$ 。P 為 B 與 C 之間的一可動點。求 $AP + PD$ 的最小值。



8. 如下圖所示， ABC 是一個三角形， D 是 AC 上的點且 $AD:DC = 1:2$ ， E 是 BD 的中點， F 是 AE 的延線與 BC 的交點。若三角形 BEF 的面積 = 30，求三角形 ABC 的面積。



乙部：解答題 (共三題，每題 20 分，共 60 分。必須寫出詳細解答過程或步驟)

1. 解關於實數 x, y, z 的方程
$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 2y = -1 \\ 2y^3 - z^2 - 2z = -1 \\ 2z^3 - x^2 - 2x = -1 \end{cases}$$
2. 已知 ABC 為一等邊三角形。 P 為三角形內的一點使 $AP = 6 \text{ cm}$ 、 $BP = 8 \text{ cm}$ 及 $CP = 10 \text{ cm}$ 。
 - (a) 求 $\angle APB$ 。
 - (b) 求三角形 ABC 的面積。
3. 運動會上， A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個冰球隊兩兩各賽一場，勝一場得 3 分，負者得 0 分、平一場兩隊各得 1 分。十場球賽完後，五個隊的得分互不相同， A 隊未敗一場，且打敗了 B 隊，可 B 隊得了冠軍，五隊得分總和為 25 分，得分最少的隊得 2 分。問第三名得多少分？

丙部：建模計算題 (共一題，20 分)

1. 將兩個正整數 n 和 m 輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟 1：令 p 的值等於 m 的 2 倍減去 n 的差；

步驟 2：輸出 p ，若 $p > 10000$ ，終止運行；

步驟 3：令 n 的值等於 m ，令 m 的值等於 p ，跳轉至步驟 1；

現在將正整數 2 和 5 依次輸入到程式中，求程式輸出的第 98 個數。

全卷完