Form 1 Answer

填充題

1. $36+b+c=180$ and $b+c=144$

   Hence the largest possible value of c is 143.

2. Let x be the required answer.

   Then $-4x+10(12-x)=64$ and $x=4$.

3. 5

4. $\frac{4AE}{2}=\frac{1}{8}(16)$ and $AE=1$

   Therefore $DE=3\,\text{cm}$.

5. 9

6. $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\frac{1}{168}+\frac{1}{224}+\frac{1}{288}\right)\times 128=\frac{256}{9}$

7. 首先,使用 1000 元現金至多可以獲得 500 元的購物券.如果有一次購物使用的現金不是整百元,那麼所獲得的購物券少於 500 元,至多 450 元；而如果每次購物使用的現金都是整百元,則最後一次購物所獲得的購物券無用,所以實際使用的購物券少於 500 元,至多 450 元.總之無論如何所能使用的購物券不超過 450 元.

   另一方面,使用購物券 450 元是可能的,例如第一次購物支付 500 元現金,獲得 250 元購物券；第二次購物使用 250 元購物券並支付 300 元現金,獲得 150 元購物券；第三次購物使用 100 元購物券並支付 100 元現金,獲得 50 元購物券,連同第二次購物剩下的 50 元購物券,共有 100 元購物券；最後一次購物使用 100 元購物券並支付 100 元現金,獲得 50 元購物券(作廢),這樣總共使用了 450 元購物券,連同支付的 1000 元現金,購買了價格共 1450 元的商品.

   Answer: 1450

8. p 的最大值是 28

將 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 填入這 10 個格子中，因"田"字格中 4 個數之和均等於 p ，其總和為$3p$.設如圖中兩個格子所填之數為x與y ，則x,y均被加了兩次，所以這 3 個"田"字形所填數的總和為

$2+3+4+...+10+11+x+y=65+x+y$.

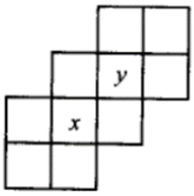
於是得$3p=65+x+y$.

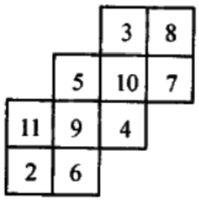
要使p最大，必須$x+y$最大，由於$x+y\le 10+11=21$ ，

所以$3p\le 65+x+y\le 65+21=86$,解得$p\le\frac{86}{3}=28\frac{2}{3}$.

所以p取得最大整數值應為 28, 這時$x+y$取最大整數值$(3\times 28-65)=19$.

事實上,如圖填法可取到$p=28$.

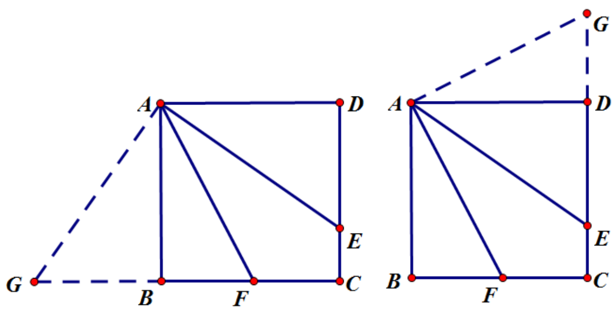




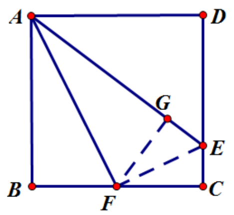
解答題

1. 由n是奇數，必有$n=p+2=q-2$，其中p,q都是奇質數且$n\ge 5$.由於除了$n=5$之外，p,q不是 3 的倍數.容易看出p,q只能分別是模 3 餘 1 和 2，所以n都是 3 的倍數，並且還要求$n+2,n-2$均為質數.因此窮舉可得，n的所有取值為 5，9，15，21，39.
總和為$5+9+15+21+39=89$.

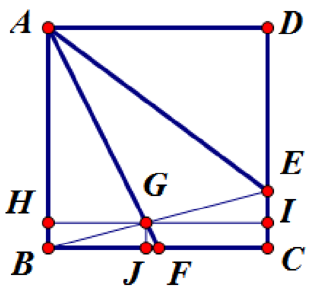
2. **解法一.** 本題的關鍵是證明$AE=BF+DE$.將ΔADE轉到ΔABG位置，容易證明ΔGAF是等腰三角形，$AG=GF=GB+BF$，而$AE=AG$，$GB=DE$ ，所以$BF=AE-DE$.由已知ΔADE的面積為$\frac{1}{2}AD\times DE=4DE=24$，$DE=6$.由畢氏定理得到$AE=10$ ，得$BF=4$，所以ΔABF的面積為 16.
類似的辦法是將ΔABF轉到ΔADG位置，容易證明ΔEAG是等腰三角形.



解法二：也可以直接計算所需要的量.由已知面積有 $DE=6$ ， $EC=2$ ，由畢氏定理知 $AE=10$.
過 F 作 FG 垂直 AE 於 G ，由角平分線性質 $AG=AB=8$ ， $GE=10-8=2=EC$. $\Delta FCE\cong\Delta FGE$ ，
得到 ΔFEA 面積 $=\frac{1}{2}(64-24)=20$，故 $GF=FC=4$.或者 $BF=GF=FC$，因此 F 是中點.所以 $BF=4$ ，所以 ΔABF 的面積為 16.

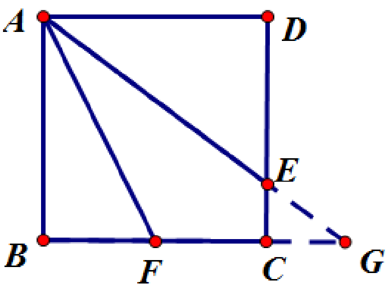


解法三：連接 BE ，交 AF 於 G ，過 G 分別作 AB 的平行線和垂線 HI 和 GJ .
由已知面積有 $DE=6$ ， $EC=2$ ，由畢氏定理知 $AE=10$.
由相似三角形和角平分線定理知 $\frac{HG}{GI}=\frac{BG}{GE}=\frac{AB}{AE}=\frac{4}{5}$ ，得到 $BJ=HG=\frac{4}{9}BC=\frac{32}{9},\ GI=\frac{40}{9}$.由 $\frac{EI}{EC}=\frac{GI}{BC}=\frac{5}{9}$ ， $EI=\frac{10}{9},GJ=IC=\frac{8}{9}$.



由 $\frac{JF}{BF}=\frac{GJ}{AB}=\frac{1}{9}$ ，得 $BF=\frac{9}{8}BJ=\frac{9}{8}\times\frac{32}{9}=4$ ，所以 ΔABF 的面積為 16.

解法四：延長 AE 與直線 BC 交於 G .由 $S_{\Delta ADE}=\frac{AD\cdot DE}{2}=24$ 可得 $DE=8$ ，再由畢氏定理可得 $AE=10$.由 $\frac{CG}{AD}=\frac{EG}{AE}=\frac{CE}{ED}=\frac{1}{3}$ ，可得 $CG=\frac{8}{3}$ ， $EG=\frac{10}{3}$ ，從而 $BG=\frac{32}{3}$ ， $AG=\frac{40}{3}$.由於 AF 是 $\angle BAE$ 平分線，有 $\frac{BF}{FG}=\frac{AB}{AG}=\frac{3}{5}$ ，由此得 $BF=4$ ，從而 $S_{\Delta ABF}=16$.



3. **解法一.**用(n,m)表示第n層第m個分數的位置，容易看到這個分數產生的下一層的兩個分數的位置為$(n+1,2m-1)$和$(n+1,2m)$；

由此反觀，位置$(7,57)$的分數是位置$(6,29)$的分數產生的第 1 個分數；位置$(6,29)$的分數是位置$(5,15)$的分數產生的第 1 個分數；位置$(5,15)$的分數是位置$(4,8)$的分數產生的第 1 個分數；

依次類推得到$(7,57)$的位置來源逆向路徑：$(7,57)$，$(6,29)$，$(5,15)$，$(4,8)$，$(3,4)$，$(2,2)$，$(1,1)$；

相當於依次 3 次向右寫分數，再接著 3 次左向寫分數，即從$\frac{2}{3}$開始連續 3 次分子變化得$\frac{11}{3}$，又作 3 次分母變化得$\frac{11}{36}$.

解法二：注意到第n層共有2^{n-1}個分數，將它們從左往右依次編號為$0,1,2,\cdots$，且將編號寫成二進位數字.那麼第 7 層第 57 個數編號為 111000，這說明它從上到下按路徑"右右右左左左"到達.由第一層分數為$\frac{a}{b}$，向右下方行進三次為$\frac{a+3b}{b}$，再向左下方行進三次為$\frac{a+3b}{3(a+3b)+b}=\frac{a+3b}{3a+10b}$，代入$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，得到$\frac{a+3b}{3a+10b}=\frac{11}{36}$.

答案. $\frac{11}{36}$

建模計算題

1. q 依次為 50，25，37，43，46； (10 marks for all correct)
   $p=5$ (10 marks)