

# 2022 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽 (決賽)

## 小高組試卷

日期：2022 年 12 月 10 日

一小時三十分鐘完卷 (10:00 am – 11:30 am)

比賽須知：

1. 全卷共 12 題，包括甲部填空題 8 題，每題 10 分；乙部解答題 3 題，每題 20 分；丙部建模計算題 1 題 20 分，總分 160 分。
2. 參賽學生必須全部作答，乙部及丙部的寫在答題紙上。
3. 甲部填空題無須書寫步驟及單位，只須在電腦系統上輸入數字；乙部解答題則須寫出詳細解答過程或步驟，完成乙部及丙部的題目後，須拍照上傳到指定系統上。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器，違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有試題、答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生必須在本試卷和答題紙上填寫以下資料：編號、學生姓名及學校名稱。(請依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

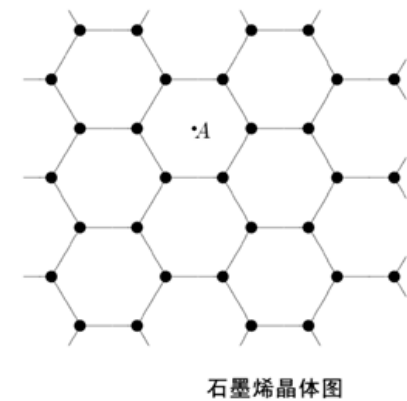
編號	學生姓名	學校名稱

甲部：填充題 (共八題，每題 10 分，共 80 分)

1. 若規定  $M * N = \frac{M + N}{2}$ ，求  $(2021 * 2023) * 2022$  的值。

2. 在一張白紙上畫上 15 條直線，問最多可以畫得多少個交點？

3. 下圖是由無限個正六邊形組成，且每個正六邊形都有一個中心點 (例如圖中的  $A$  點)。由此可見這個圖有高度的對稱性。問題：過其中一個正六邊形的中心點 (例如  $A$  點) 有多少條整個圖的對稱軸？



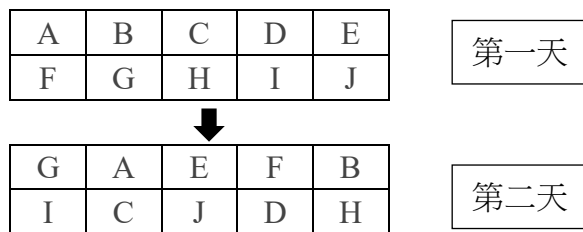
4. 已知  $ABCD$  是一個四邊形，且四邊形的兩條對角線  $AC$  及  $BD$  互相垂直， $AC$  及  $BD$  相交於  $X$ 。 $X$  與四個頂點的距離分別是 1 cm，2 cm，4 cm 及 7 cm。求四邊形  $ABCD$  的最大可能面積。

5. 一個正整數  $a$  等於某正整數  $b$  自乘兩次後的 2 倍，而正整數  $a$  也是某正整數  $c$  自乘五次後的 5 倍，求  $a$  的最小值。

6. 若從 1, 2, 3, 4, 5, ..., 24, 25 這 25 個數字中選取兩個數字 (不可重覆)，使該兩數之和為平方數。求這平方數的最大值。

7. 計算  $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \frac{3}{5 \times 6 \times 7} + \dots + \frac{1011}{2021 \times 2022 \times 2023}$ 。

8. 有一個廣告牌，它的屏幕分為 10 個格子，每個格子都會有相應的廣告，每一天這些廣告都會按照特定的規律移到其它格子顯示，如下圖。



最少要幾多天後廣告 A 才可返回第一天顯示的位置？

**乙部：解答題 (共三題，每題 20 分，共 60 分。必須寫出詳細解答過程或步驟)**

- 甲、乙、丙三個同學在一個環形跑道上練長跑，三人同時從起跑線出發，甲、乙二人沿順時針方向跑，丙沿逆時針方向跑，跑步過程中三人各自都保持速度不變。已知甲跑完一圈要 60 秒，乙跑完一圈要 75 秒，丙跑完一圈要 72 秒。甲、乙、丙起跑後最少需要過了多少分鐘他們三人才會再次相遇？
- 考慮這樣的 7 位數：每個數由 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9 組成 (次序隨意但不可重複使用，首位不能為 0)。這樣的 7 位數中能被 11 整除的有多少個？
- 在 2022 後面寫上一串數字，從第 5 個數字開始，每個數字都是它前面兩個數字的乘積的個位數字，這樣可得到  
202248262.....，那麼這串數字中首 2022 個數字之和是多少？

丙部：建模計算題 (共一題，20 分)

1. 將 102 個正整數  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\dots$ 、 $a_{99}$ 、 $a_{100}$  以及  $m$  和  $n$  依次輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟 1: 依次讀取  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\dots$ 、 $a_{99}$ 、 $a_{100}$  的值，如果  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 100$ ) 的值除以  $m$  的餘數為 0，則把  $a_i$  的值修改為 0；

步驟 2: 依次讀取  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\dots$ 、 $a_{99}$ 、 $a_{100}$  的值，如果  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 100$ ) 的值除以  $n$  的餘數為 0，則把  $a_i$  的值修改為 0；

步驟 3: 依次輸出  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\dots$ 、 $a_{99}$ 、 $a_{100}$  的值，結束程式。

現在將 102 個正整數依次輸入到程式中，前 100 個數是 1、2、 $\dots$ 、99、100，第 101 和第 102 個數是 3 和 5，則程式輸出的 100 個數中，不是 0 的數有多少個？

全卷完