<u>小高組– Senior Primary (10 marks for each question)</u>

1. 解：a_{23}＝4，a_{13}＝2，a_{44}＝4⇒a_{42}＝3，a_{41}＝2⇒a_{12}＝4，a_{14}＝3；a_{32}＝1；a_{34}＝2⇒a＝1，b＝4，ab＝4

2. 三個隊共有 20 名隊員，只屬於一個隊的隊員有 12 人，

   故所求概率＝$\frac{12}{20}$＝$\frac{3}{5}$

3. 只能取走第二層左前與右後的兩個小正方體

4. 正三角形 ABC 的邊長 AC＝AP＋PQ＋QC＝EF＋PQ＋MN＝

   2＋3＋6＋3＋2＝16

5. 7048－3316＝3732　　𝍫𝍦𝍫𝍡

6. 由 $a!+b!+c!+d!=w!$ 得 $4\leq w!\leq 4\times(w-1)!$，得 $2<w\leq 4$．
   又 3!＝2!＋2!＋1!＋1!，4!＝3!＋3!＋3!＋3!，故 w＝3 或 w＝4．
   因此所有滿足等式的數 w 之和為 7．

7. 德國數學家洛薩·柯拉茨在 1937 年提出了一個猜想：如果 n 是奇數，我們計算 $3n+1$；如果 n 是偶數，我們除以 2．不斷重複這樣的運算，經過有限步驟後一定可以得到 1．例如，n＝6 時，經過上述運算，依次得到一列數 6，3，10，5，16，8，4，2，1．小梁同學對某個正整數 n，按照上述運算，得到一列數，已知第 6 個數為 1，求 n 的所有可取值．

   答：4，5，32．

   解：逆推：第五次只能為 2；第四次只能為 4；第三次只能為 8 或 1；第二次可能為 16 或 2，第一次為 32 或 5 或 4．即正整數 n 的所有可能取值為 4，5，32．

8. 若將 9 個數按照從小到大的順序排成一列，中間的數恰是這 9 個數的平均數，前 5 個數的平均數是 40，後 5 個數的平均數是 60，求這 9 個數的和．

答：450．

解：設這 9 個數的和為 S，則中間數為$\frac{S}{9}\Rightarrow S+\frac{S}{9}=40\times5+60\times5=500$

$\Rightarrow S=450.$

9. 若存在整數 a_1，a_2，…，a_n，滿足 $a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1a_2\ldots a_n=n$，則稱數 n 為“美麗數”．在 1，2，…，2019 這 2019 個正整數中，有多少個“美麗數” ？

答：1008．

解：$4k+1=(4k+1)+1+\ldots+1+(-1)+\ldots+(-1)=(4k+1)\times1\times\ldots\times1\times(-1)\times\ldots\times(-1)$ ($2k$ 個 1，$2k$ 個-1)，這樣的 $4k+1$ 型都是“美麗數”，共有 505 個；$8k=4k+2+1+1+\ldots+1+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)=4k\times2\times1\times1\times\ldots\times1\times(-1)\times(-1)\times\ldots\times(-1)$ ($6k-2$ 個 1，$2k$ 個-1).

$16k-4=(4k-1)\times2\times2\times1\times\ldots\times1\times(-1)\ldots\times(-1)$，($14k-7$ 個 1，$2k$ 個-1)．

$16k+4=(4k+1)\times2\times(-2)\times1\times\ldots\times1\times(-1)\ldots\times(-1)$($14k+2$ 個 1，$2k-1$ 個-1)於是，所有 $4k$（$k\geq2$)型數都是“美麗數”，共有 503 個．

所有 $4k+2$ 及 $4k+3$(k 為非負整數)型數都不是“美麗數”．4 也不是“美麗數”．“美麗數”的個數為 1008．

10. 已知一個長方體的長、寬、高各不相同，且此長方體相鄰兩個面的面積之和與長方體的所有棱長之和的比值只可能是 3，5，7，則該長方體的長、寬、高之和是__________．

答：$\frac{6962}{45}$．

解：設長方體三度分別為 x，y，$z(x<y<z)$，於是，據題意有

$$\begin{cases}x(y+z)=12(x+y+z)，&①\\y(x+z)=20(x+y+z)，&②\\z(x+y)=28(x+y+z)．&③\end{cases}\Rightarrow 令\frac{xy}{x+y+z}=a，\frac{xz}{x+y+z}=b，\frac{yz}{x+y+z}=c，$$

$$\begin{cases}a+b=12，\\a+c=20，\\b+c=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2，\\b=10，\\c=18.\end{cases}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{c}{b}=\frac{9}{5}\Rightarrow y=\frac{9}{5}x，\frac{z}{x}=\frac{c}{a}=9\Rightarrow z=9x，$$

代入①得，$x=\frac{118}{9}$，$y=\frac{118}{5}$，$z=118\Rightarrow x+y+z=\frac{6962}{45}$．