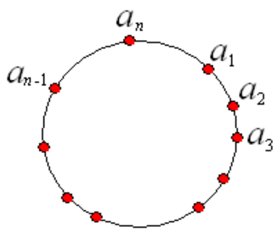
初中二年级组试题答案

一、 填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 已知 $a=\sqrt{3}-1$，则 $a^{2015}+2a^{2014}-2a^{2013}$ 的值是（ 0 ）



2. 如图，圆周上顺时针排列有 n 个互不相同的有理数，满足 $a_i=a_{i-1}\times a_{i+1}(i=2,3,4,\ldots)$ 且 $a_n=a_{n-1}\times a_1$.则 n =（ **6** ）.

3. 甲、乙和丙三个车队于某日共行驶了 21600 公里，其中甲车队每辆车平均行驶了 325 公里，乙车队每辆车平均行驶了 250 公里，丙车队每辆车平均行驶了 150 公里. 已知丙车队车辆恰好是甲乙两个车队车辆总数的三分之一，问丙车队最多有车（ **23** ）辆.

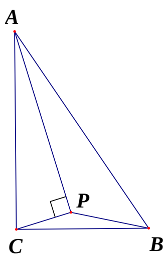
4. 在 1~10000 的自然数中，既不是完全平方数也不是完全立方数的整数的个数为（ 9883 ）

5. 在直线 l 上有 2014 个不同的黄点，标出以这些黄点为端点的线段的中点，并将这些中点都染成红色（若中点恰是黄点，则该黄点要改染为红点）．设染成红色的点至多有 m 个，至少有 n 个，则 $m=$（ 2027091 ），$n=$（ 4025 ）.

6. 质数 $p>5$，则 336 除 $7p^4+5$ 的余数是（ 12 ） .

7. 如图，在直角△ ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6,BC=4$.

P 是△ ABC 内一点，满足 $\angle APC=90^\circ$，则 BP 的最小值为（ 2 ）.



8. 实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$ 且 $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$，

则 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$（ 0 ）.

二、 解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 已知：$3x+2y\le 7$， $2x-3y\ge 2$，则 $x+y$ 的最大值为多少？

【解答】$\frac{33}{13}$

【解答】设 $x+y=m(3x+2y)-n(2x-3y)$，则

$$x+y=(3m-2n)x+(m+2n)y$$

令 $3m-2n=1$， $2m+3n=1$， 解得 $m=\frac{5}{13}$， $n=\frac{1}{13}$。

于是 $x+y=\frac{5}{13}(3x+2y)-\frac{1}{13}(2x-3y)$。

因为 $3x+2y\le 7$， $2x-3y\ge 2$，

所以 $x+y=\frac{5}{13}(3x+2y)-\frac{1}{13}(2x-3y)\le\frac{5\times 7-2}{13}=\frac{33}{13}$。

当$3x+2y=7$， $2x-3y=2$，即 $x=\frac{25}{13}, y=\frac{8}{13}$时，上式等号成立

由此可知，$x+y$的最大值为$\frac{33}{13}$。

10. 平面上有 2015 条直线，任意两条要么垂直，要么平行．那么它们间最多可以形成多少个直角.

答案：它们间最多可以形成 4060224 个直角.

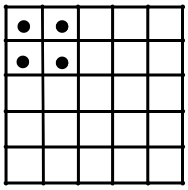
解．直线 a 垂直直线 b,与 a 平行的有 m-1 条直线，则另有 2014---m 条直线与 b 平行．共形成,

$4m(2015-m)$ 个直角. $4m(2015-m)\le 4\times 1007\times 1008=4060224.$

11. 把 15 个相同的棋子放入5×5的网格中，每个网格最多放一个，每行每列恰有 3 个棋子，共有多少种不同放法（不考虑旋转）。

答案：2040

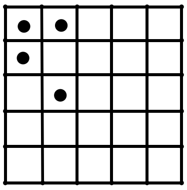
解答：根据*补图*的形式。可以考虑放 10 个棋子到5×5的网格中，每行每列恰有 2 个棋子. 其补图就是题目中要求的 15 个棋子放入5×5网格中。



5×5方格先放第一行的 2 个棋子有 10 种方式。每种方式放置第一行的 2 个棋子后。放置棋子的两列，剩下的 2 个棋子放置有下面的情况。

情况 1：2 个棋子同行，有 4 种方式。此时剩下的 6 个棋子放到一个3×3方格中，每行每列恰有 2 个棋子，有 6 种放置方式。因此有$10\times4\times6=240$种放置方式。

情况 2：2 个棋子异行，有 12 种方式。放置前面 4 个棋子后，未放棋子的两行的 4 个棋子要放到 3 列中。有抽屉原则，2×3网格中至少有 1 列有两个棋子。分下面两个情况讨论：



子情况 1：2×3网格中恰有 2 列有 2 个棋子，共有 3 种方式。放置 8 个棋子后剩下两个棋子只有 1 种放置方式。因此有$10\times12\times3\times1=360$种放置方式。

子情况 2：2×3网格中恰有 1 列有 2 个棋子，该列有 3 种选择方式。2×3网格中剩下两个棋子放到一个2×2方格中，每行每列只有一个棋子，有 2 种放置方式。放置 8 个棋子后剩下的 2 个棋子有两种放置方式。因此有$10\times12\times3\times2\times2=1440$种放置方式。

共有$240+360+1440=2040$种放置方式。

12. 从 1 至 25 的正整数中任取 *a* 个互异的数，其中必定存在两个，小的比上大的比值小于2/5 ，则 *a* 的最小值是多少？

答案：17.

解答：将 1 至 50 个正整数分类：

{1,3,8,21}，{2,6,16}, {4,11}, {5,13}, {7,18}, {9,23}, {10}, {12}, {14}，{15}，{17}，{19}， {20}, {22}, {24}, {25}，

大括号内的数多于 1 个，则其中任何 2 个数，小的比上大的比值小于**2/5**。
共有 16 个抽屉，所以 a 的最小值是 17.

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

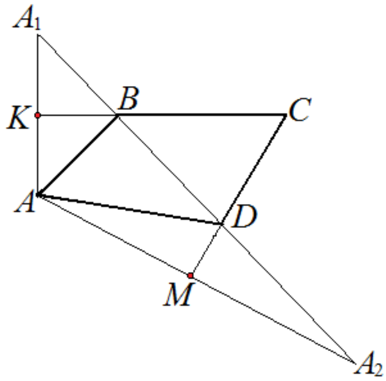
13. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$.点 A_1 和 A_2 分别关于直线 CB 和 CD 与点 A 对称.如果已知点 A_1，A_2，B 和 D 在一条直线上.则 $\angle BCD=$（　　）

答: 60°.

解：设 K 和 M 分别是直线 CB 和 AA_1 及 CD 和 AA_2 的交点（如图）.

由条件得出，BK 是△ABA_1 的对称轴.

所以 $AB=AB_1$ 和 BK 是 $\angle ABA_1$ 的平分线.由此得出



$$\angle CBD=\angle KBA_1=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle ABD\right).$$

类似可得

$$\angle CDB=\angle MDA_2=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle ADB\right)$$

则

$$\angle BCD=180^\circ-\angle CBD-\angle CDB=\frac{1}{2}\left(\angle ABD+\angle ADB\right)=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle BAD\right)=60^\circ.$$

14. 二次三项式 $x^2-ax+6a$ 可以分解因式成 $(x-u)(x-v)$. 若 u, v 都是整数, 求 a 的所有值.

解.$x^2-ax+6a=(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)x+uv$,

$\therefore u+v=a, uv=6a, u+v=\frac{uv}{6}$,

$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{6}$.

令$u=6+p, v=6+q$.

$$\frac{1}{6+p}+\frac{1}{6+q}=\frac{1}{6}, \frac{12+p+q}{(6+p)(6+q)}=\frac{1}{6}$$

则$72+6(p+q)=36+6(p+q)+pq, pq=36=2^2\times3^2$.

36 有 5 对因子(p,q)=(1,36);(2,18);(3,12);(4,9);(6,6).

(u,v)就有 5 对可能值：（7, 42）；（8, 24）；（9, 18）；（10, 15）；（12, 12）. 因此, a 的可能值是：49, 32, 27, 25, 24.