

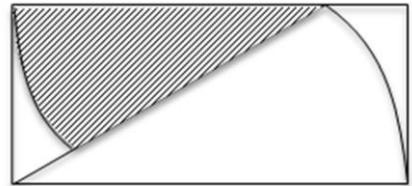
## 初中一年级组试题

### 一、 填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1.  $-3.875 \times (0.775 - 10.\dot{3}) \div \frac{31}{8} \times \frac{8}{31} = \frac{37}{15}$

2. 已知  $x^2 + y^2 + 4 = 2x + xy + 2y$ ，那么  $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$  的值是 32。

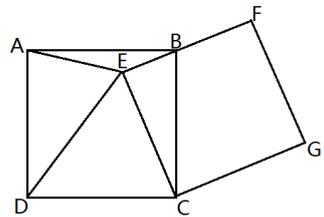
3. 长方形的长和宽分别是 20 厘米和 10 厘米，如右图所示，有两个扇形，那么阴影部分的扇形的面积是 78.5 平方厘米。（ $\pi$  取 3.14）



4. 网上书店的会员可以享受原价 8 折的会员价，寒假时促销活动又给每位会员赠送了每满 100 元减 50 元的优惠券，优惠券可以单独使用也可以和会员价叠加使用。大明在买书时发现，单独使用优惠券竟然比和会员价叠加使用优惠券更划算，节省了 9 元，那么他购买的书原价是 205 元。

5. 一个口袋里有三种球，分别标有数字 2, 5 和 7。小王从中摸出 15 个球，它们的数字之和是 63。则小王最多摸出 8 个标有数字 2 的球。

6. 已知正方形  $ABCD$  与正方形  $CEFG$  的面积分别为 2018 和 1984， $B$  在  $EF$  上，则三角形  $ABE$  的面积是 17。



7. 整数  $a, b, c$  为三角形的三边，且满足  $a > b > c$ ,  $a + c = 2b$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 1947$ ；则  $b =$  25。

8. 设  $a, b, c$  是从 1 到 9 的互不相同的正整数， $\frac{a+b+c}{abc}$  的最大值是： $\frac{2}{21}$ 。

## 二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 有两个盒子 A、B 中分别装着不同数量的两种小球，两盒子小球的总重量是一样的. 同时从 A、B 盒子中拿出一个小球，放入 C 盒子中，记为一次操作. C 盒子开始为空，经过 50 次操作后，其中小球的总重量与 B 盒子一样. 又经过 25 次操作，C 盒子小球的总重量与 A 盒子一样. 继续操作直到 A、B 盒子中有一个为时空时停止操作，A、B 盒子中剩余的小球总重量为 48 克，那么此时 C 盒子中的小球总重量为多少克？

**答案:** 80

理由: 设 A 盒子的小球数量为  $m$ ，A 盒子中单个小球重量为 1，B 盒子中单个小球重量为  $k$ . 根据题目，可以判断  $k \geq 1$ （A 盒子小球比 B 盒子小球轻）. 当 C 盒子与 B 盒子一样重时，B 盒子的重量为  $m - 50k$ . 当 C 盒子与 A 盒子一样重时，A 盒子的重量为  $m - 75$ . 所以

$$(m - 75) = (m - 50k) + 25(k + 1)$$

解方程得  $k = 4$ . 所以 A、B 盒子中的单个小球重量是 1 比 4，数量是 4 比 1.

当 B 盒子中的小球取光时，A 盒子还剩下四分之三的小球，此时 A 盒子与 C 盒子的重量比为 3 比 5，所以 C 盒子中的小球重量为  $48 \times \frac{5}{3} = 80$  克.

10. 从 30 个整数  $1, 2, 3, \dots, 30$  中选出一些数，使得其中任意两个整数，它们的和不是它们差（大减小）的 3 倍的倍数，至多可以选出多少个整数？

**答案:** 16

**理由:** 将 30 个整数  $1, 2, 3, \dots, 30$  分成如下 16 组:

$\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{7, 8\}, \{10, 11\}, \{13, 14\}, \{16, 17\}, \{19, 20\}, \{22, 23\}, \{25, 26\}, \{28, 29\}, \{3, 6\}, \{9, 18\}, \{12, 24\}, \{15, 30\}, \{21\}, \{27\}$

相当于有 16 个抽屉，若从  $1, 2, 3, \dots, 30$  中任选 17 个，则必有 2 个选自同一组，它们的和是差的 3 倍的倍数.

若选出 16 个整数是  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 3, 9, 12, 30, 21, 27$ ，其中任意 2 个，其和不是其差 3 倍的倍数. 所以，至多可以选出 16 个.

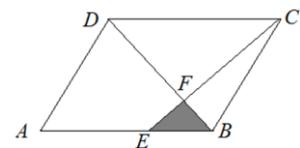
11. 一个四位数，分成 2 个两位数，1 个是千位和百位，另一个是十位和个位，这两个两位数的乘积的 2 倍等于原四位数.这个四位数是多少？

**答案：** 1352

**解答：** 此两个两位数设为  $x$  和  $y$

$2xy=100x+y$ ,  $(2x-1)y=100x$ . 因为  $x$  与  $2x-1$  互素，故  $x$  只能除尽  $y$ ，令  $y=ax$ ，则  $(2x-1)a=100$ .  $2x-1$  是奇数，只能是 25 的因子 1, 5, 25 这三者之一，即  $x$  是 1, 3, 13 这三者之一. 于是  $a$  是 100, 20, 4 这三者之一，即  $y$  是 100, 60, 52 这三者之一. 第一个当然不可能，第三个结果就是 1352.  $y$  是 60,  $x$  不是两位数.

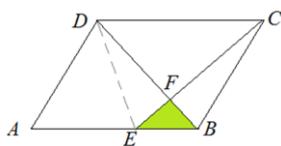
12. 右图中， $ABCD$  是平行四边形， $AE=2EB$ ，三角形  $EBF$  的面积是 1，则平行四边形  $ABCD$  的面积是多少？



**答案：** 24

**解答：** 设行四边形  $ABCD$  的面积是  $6x$ .

连接  $DE$ ，三角形  $EBD$  面积 =  $x$ ，三角形  $CBE$  面积 =  $x$ ，三角形  $CBD$  面积 =  $3x$ . 应用“共边定理”，列解方程：



$$\frac{S_{\triangle EBD}}{S_{\triangle EBF}} = \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle CBE} - S_{\triangle EBF}} = \frac{DB}{FB},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3x}{x-1}, \quad x = 4.$$

所以，平行四边形  $ABCD$  的面积是 24.

### 三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 某工厂每天用于生产甲产品和乙产品的全部劳动力为 90 个工时，原料为 80 个单位.生产甲产品需要 2 个工时和 4 个单位的原料，生产乙产品需要 3 个工时和 1 个单位的原料.则每天生产甲、乙产品的总数最多是( ).

**答案：** 35

解答：设每天生产甲、乙产品的数量分别是  $x, y$ ，则可将原题转化为在不等

式组  $\begin{cases} 2x+3y \leq 90 \\ 4x+y \leq 80 \end{cases}$  的条件下，求  $w = x + y$  的最大值.

我们设  $w = x + y = a(2x+3y) + b(4x+y) = (2a+4b)x + (3a+b)y$ ，则由系数

关系可以得到  $\begin{cases} 2a+4b=1 \\ 3a+b=1 \end{cases}$ ，解方程组可得  $\begin{cases} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{1}{10} \end{cases}$ .

$$\text{即 } w = x + y = a(2x+3y) + b(4x+y) = \frac{3}{10}(2x+3y) + \frac{1}{10}(4x+y)$$

$$\leq \frac{3}{10} \times 90 + \frac{1}{10} \times 80 = 35$$

14. 已知由小到大的 10 个正整数  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  的和是 2018，那么  $a_5$  的最大值是多少？此时  $a_{10}$  的值为多少？

解：要使  $a_5$  最大，必须  $a_1, a_2, a_3, a_4$  及  $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$  尽量小。令  $a_1, a_2, a_3, a_4$  依次为 1, 2, 3, 4；即  $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq 2008$ 。

又  $a_6 \geq a_5 + 1, a_7 \geq a_5 + 2, a_8 \geq a_5 + 3, a_9 \geq a_5 + 4, a_{10} \geq a_5 + 5$ ，故  $2008 \geq 6a_5 + 15$ ， $a_5 \leq \frac{1993}{6} = 332\frac{1}{6}$ 。又  $a_5$  为正整数，所以  $a_5 \leq 332$ ，则  $a_5$  的最大值为 332；

当  $a_1, a_2, a_3, a_4$  依次为 1, 2, 3, 4 时， $a_{10} = 338$ ；

当  $a_1, a_2, a_3, a_4$  依次为 1, 2, 3, 5 时， $a_{10} = 337$ 。