

第十八屆全國華羅庚金杯少年數學邀請賽(香港賽區)

中 二 組

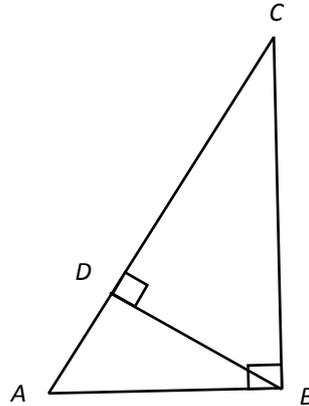
2013 年 4 月 20 日 10:00-11:30

比賽須知

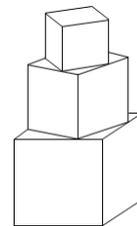
1. 全卷共 18 道試題，參賽學生必須全部作答。如果答案為分數，必須約至最簡。
2. 填充題無須書寫步驟，只須填寫答案；簡答題，求寫出簡單過程；解答題，要求寫出詳細過程。
3. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮等。但不准使用計算器，違規者將被取消資格。
4. 請參賽學生在答題紙上填寫：參賽編號、參賽者姓名以及所在學校。

一、填空题 (每小題 10 分, 共 120 分)

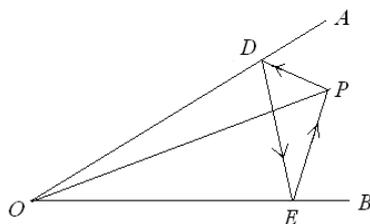
1. 已知 x 及 y 為質數, 且 $x+y=2013$. 求 xy 的值.
2. 2013 有多少個正因數?
3. 已知 $x+y=20$ 及 $xy=13$, 求 x^2+y^2 的值.
4. 圖中, ABC 為一個直角三角形, 其中 $\angle B=90^\circ$. 若 $AB=7$, $BC=24$ 及 $BD \perp AC$. 求 BD 的長度.



5. 計算 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2012} \times \frac{1}{2013}$.
6. 已知小數 $A = \overline{201.ab}$, 其中 a 及 b 為一位整數. 把 A 取四位有效數字後, 得結果為 201.3. 那麼, A 有多少個可能值.
7. 化簡: $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} =$ _____.
8. 從 1~2013 的自然數中, 含有重複數字的自然數的個數等於 _____.
9. 三個正方體粘在一起構成的幾何體如圖所示, 其中上面正方體的下底面正方形的四個頂點分別是下面正方體上底面正方形的三等分點. 如果最下面正方體的棱長為 9, 那麼這個幾何體的表面積是 _____.



10. 已知 $\angle AOB = 30^\circ$. 在角的內部距頂點 O 為 1 米的 P 點住有一個藍精靈. 藍精靈從 P 走到角的 OA 邊上的一點, 即刻返身走到 OB 邊的一點, 然後走回到 P 點. 藍精靈所走的最短路程是_____米.



11. 已知在平面直角坐標系中有如下 36 條直線:

$$y = 18x + 17, y = 17x + 16, \dots, y = 2x + 1, y = x,$$

$$y = -x, y = -2x + 1, \dots, y = -17x + 16, y = -18x + 17,$$

那麼由這些直線相交所構成的交點有_____個.

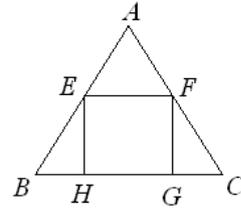
12. 若在實數範圍內有因式分解: $x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c)$, 且 $q \neq 0$, 則

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、解答下列各題 (每題 10 分, 共 40 分, 要求寫出簡要過程)

13. 只用 4 個數碼 4 和一些加、減、乘、除、冪、開平方運算和括弧, 寫出 5 個不同的、值都等於 7 的算式.(通過加法、乘法交換律和結合律, 使兩個算式相同, 則視為相同的算式, 如: $4 + 4 - \sqrt{4 \div 4}$, $4 - \sqrt{4 \div 4} + 4$, $-\sqrt{4 \div 4} + 4 + 4$ 和 $-(\sqrt{4 \div 4} - 4) + 4$ 都視為相同的算式.)
14. 學校對植樹有兩種補貼方案: 第一種方案是每成活一棵補助 5 元, 不成活的每棵補助 2 元, 未完成植樹任務的部分, 不補也不罰; 第二種方案是, 先補貼 130 元, 再每成活一棵補貼 3 元, 不成活的每棵罰 1 元, 未完成植樹任務的部分, 每棵罰 2 元. 不管按照那種方案補貼, 梁兵都得到種樹補貼 271 元. 問: 梁兵的植樹任務是多少棵?

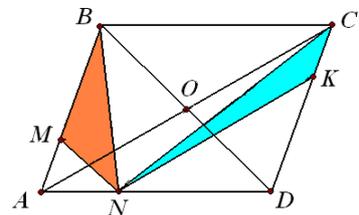
15. 如圖, 矩形 $EFGH$ 內接于邊長為 1 的正三角形 ABC 中, GH 在 BC 邊上. 當矩形 $EFGH$ 的面積最大時, 求其面積.



16. 黑板上寫有 $1, 2, \dots, 2013$ 這 2013 個數, 某人擦去黑板上的任意 n 個數, 要使得剩下的數中至少有兩個數的和是 2 的幕次, 請問: n 最大是多少?

三、解答下列各題 (每小題 15 分, 共 30 分, 要求寫出詳細過程)

17. 平行四邊形 $ABCD$ 的邊 AD 上任取一點 N , 過 N 作平行於對角線 AC, BD 的直線分別交邊 AB, CD 於點 M 和 K . 證明: 三角形 NMB 與 NKC 等積.



18. 解方程: $[x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \left[x + \frac{2}{8}\right] + \dots + \left[x + \frac{7}{8}\right] = 8x^2 + \frac{7}{8}$, 其中 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數.