第十八屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案

（中二組）

一、填空（每題 10 分，共 120 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	4022	8	374	6.72	$\frac{2011}{4026}$	10	$\sqrt{2}$	770	766	1	326	3

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13.

解答. 例如

$$4 \div 4 + \sqrt{4} + 4 = 7, \quad \sqrt{4 \div 4} + \sqrt{4} + 4 = 7,$$

$$4 + 4 - 4 \div 4 = 7, \quad 44 \div 4 - 4 = 7, \quad 4 \times \sqrt{4} - 4 \div 4 = 7.$$

14. 答案：61

解答. 設成活 a 棵，沒有成活 b 棵，未完成植樹 c 棵．則

$$\begin{cases} 5a + 2b = 271 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3a - b - 2c + 130 = 271 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由（1）可知，a 是奇數，且 $a \le 54$；由（2）可知，$a \ge 47$．下麵對 $a = 47, 49, 51, 53$ 進行試算，求得整數解:

$a = 47, b = 18, c = -9$，(不合要求)；

$a=49, b=13, c=-3.5$，（不合要求）;

$a=51, b=8, c=2,$
$a+b+c=51+8+2=61;$

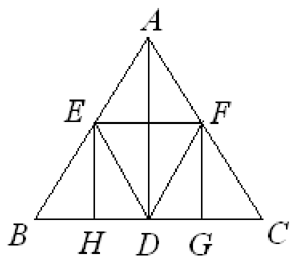
$a=53, b=3, c=7.5$，（不合要求）.

可見，植樹任務數是 61.

15. 答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

解答. 作 BC 邊上的高 AD, AD 也是$\angle A$的平分線. AD 交 EF 於 P. 於是，

$\angle EAP=\angle BEH=30^\circ$
$\angle APE=\angle EHB=90^\circ$



設 $AE=x$，則 $EB=1-x,\ EP=\dfrac{1}{2}x,\ AP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. 因此，

$$S_{\Delta AEF+\Delta EHB+\Delta FGC}=\frac{1}{2}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[x^2+(1-x)^2\right]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-x+\frac{1}{2})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right]$$

由此可見，當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，上述三角形面積和最小，從而內接矩形 $EFGH$ 的面積最大. 此時，$AE:EB=1$. 連結 ED 和 FD, 容易知道，

$$S_{\square EFGH}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{4}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

16. 答案：1003

解答. 將 2013 個數分成如下 1009 組:

(2013,35), (2012,36), ⋯, (1025,1023), (1024),

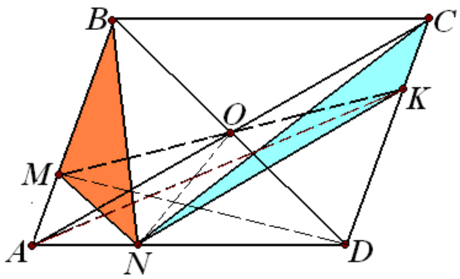
(34,30), (33,31), (32), (29,3), (28,4), ⋯, (17,15), (16), (2), (1),

其中有 1004 組中每組都有兩個數，且這兩個數之和是 2 的冪次，若擦剩下的數的個數大於等於 1010，由抽屜原理知，必然有一組中兩個數都被剩下了，那麼這兩數和為 2 的冪次，所以擦去 1003 個數滿足題目要求．如果擦去 1004 個數，即剩下 1009 個數，我們取這 1009 組中每一組的較大數，那麼顯然這些數的任意兩個之和都不是 2 的冪次，故不滿足題意，所以最多擦去 1003 個數．

三、解答下列各題（每題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

17.

解答. 連接 AK. 先證 $AM=CK$.



$$\frac{CK}{CD}=\frac{\Delta ACK\text{的面积}}{\Delta ACD\text{的面积}}=\frac{\Delta ACN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}$$

$$=\frac{\Delta ABN\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{\Delta AMD\text{的面积}}{\Delta ABD\text{的面积}}=\frac{AM}{AB}.$$

因為 $CD=AB$，所以 $AM=CK$. 連接 OM，OK，ON. 則 $\triangle OMA\cong\triangle OKC$. 所以 $\angle MOA=\angle KOC$. 因此

$$\angle MOA+\angle AOK=\angle KOC+\angle AOK=180^{\circ},$$

所以 M，O，K 共線，ON 是 $\triangle KNM$ 的中線，所以

$$\triangle ONM\text{ 的面積}=\triangle OKN\text{ 的面積}.$$

但

$$\triangle NMB\text{ 的面積}=\triangle ONM\text{ 的面積}，\triangle NKC\text{ 的面積}=\triangle ONK\text{ 的面積}.$$

所以

$$\triangle ONM\text{ 的面積}=\triangle OKC\text{ 的面積}.$$

因此，三角形 NMB 與 NKC 等積.

18. $\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{33}}{8}, \frac{\sqrt{41}}{8}, \frac{7}{8}$

解答. 若 $x \le 0$，則

$$0 \ge [x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \left[x + \frac{2}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7}{8}\right] = 8x^2 + \frac{7}{8} > 0,$$

矛盾. 所以 $x > 0$.

由帶餘除法,

$$[8x] = 8q + r \le 8x < [8x] + 1 = 8q + r + 1, \quad (0 \le r \le 7).$$

所以

$$q + \frac{r}{8} \le x < q + \frac{r+1}{8}.$$

對於 $0 \le i \le 7$,

$$q + \frac{r+i}{8} \le x + \frac{i}{8} < q + \frac{r+i+1}{8}.$$

當 $i \le 7 - r$ 時, 即 $\frac{r+i+1}{8} \le 1$. 有 $\left[x + \frac{i}{8}\right] = q$. 當 $\frac{r+i}{8} \ge 1$ 時, 即 $7 \ge i \ge 8 - r$, 有 $\left[x + \frac{i}{8}\right] = q + 1$.

所以

$$\begin{aligned} &[x] + \left[x + \frac{1}{8}\right] + \cdots \left[x + \frac{7-r}{8}\right] + \left[x + \frac{8-r}{8}\right] + \cdots + \left[x + \frac{7}{8}\right] \\ &= (8-r)q + r(q+1) = 8q + r = [8x]. \end{aligned}$$

因此

$$[8x] = 8x^2 + \frac{7}{8}. \tag{$*$}$$

因為

$$8[8x]=64x^2+7=(8x)^2+7=\left([8x]+\{8x\}\right)^2+7,$$

$$[8x]^2+7\le 8[8x]<\left([8x]+1\right)^2+7=[8x]^2+2[8x]+8,$$

所以

$$[8x]^2-8[8x]+7\le 0,\quad [8x]^2-6[8x]+8<0.$$

由上面第一個式子得到, $([8x]-1)([8x]-7)\le 0$, $1\le[8x]\le 7$;由上面第二個式子得到,

$([8x]-2)([8x]-3)>0$, $[8x]<2$ 或 $[8x]>4$. 因此

$$[8x]=1,5,6,7.$$

將$[8x]$可以取的四個值分別代入(*)式,解得大於 0 的 x 分別為

$$\frac{1}{8},\frac{\sqrt{33}}{8},\frac{\sqrt{41}}{8},\frac{7}{8}.$$