

第十八屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案（初一組）

一、填空（每題 10 分，共 120 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	3	1007	-1	$\frac{2011}{4026}$	0	10	129°	61	$\frac{21}{4}$	660	$\frac{9000}{37}$	$-\frac{85}{9}$

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13. 解答：其中的五個算式如下

$$4^{4+(-4)} + 4 = 5,$$

$$(-4)^{4+(-4)} + 4 = 5,$$

$$\frac{4 \times (-4) + (-4)}{-4} = 5,$$

$$\frac{(-4) \times (-4) + 4}{4} = 5,$$

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5$$

14. 答案： $x = \frac{25}{18}, \frac{27}{18}, \frac{29}{18}$

解答：由於

$$x+2-1 < [x+2] \leq x+2, 5x+1-1 < [5x+1] \leq 5x+1$$

所以

$$6x+1 < [x+2] + [5x+1] = 9x - \frac{5}{2} \leq 6x+3$$

由此得

$$\frac{7}{6} < x \leq \frac{11}{6}$$

於是

$$9x - \frac{5}{2} = 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

分別解方程：

(1) $9x - \frac{5}{2} = 9$, 解得： $x = \frac{23}{18}$.

驗算：左=3+7=10, 右= $\frac{23-5}{2} = 9$, 左≠右, $x = \frac{23}{18}$ 不是解.

(2) $9x - \frac{5}{2} = 10$, 得： $x = \frac{25}{18}$.

驗算：左=3+7=10, 右= $\frac{25}{2} - \frac{5}{2} = 10$, 左=右, $x = \frac{25}{18}$ 是解.

(3) $9x - \frac{5}{2} = 11$, 解得： $x = \frac{27}{18}$

驗算：左=3+8=11, 右= $\frac{27}{2} - \frac{5}{2} = 11$, 左=右, $x = \frac{27}{18}$ 是解.

(4) $9x - \frac{5}{2} = 12$, 解得： $x = \frac{29}{18}$

驗算：左=3+9=12, 右= $\frac{29}{2} - \frac{5}{2} = 12$, 左=右, $x = \frac{29}{18}$ 是解.

(5) $9x - \frac{5}{2} = 13$, 解得： $x = \frac{31}{18}$

驗算：左=3+9=12, 右= $\frac{31}{2} - \frac{5}{2} = 13$, 左≠右, $x = \frac{31}{18}$ 不是解.

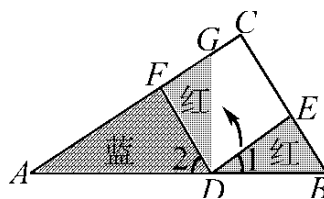
(6) $9x - \frac{5}{2} = 14$, 解得： $x = \frac{33}{18}$

驗算：左=3+10=13, 右= $\frac{33}{2} - \frac{5}{2} = 14$, 左≠右, $x = \frac{33}{18}$ 不是解.

因此, 解是： $x = \frac{25}{18}, \frac{27}{18}, \frac{29}{18}$

15. 答：144 平方釐米.

解：如圖，以 D 為中心，逆時針旋轉三角形 BDE , 使 DE 和 DF 重合, BE 和 FG 重合, 三角形 BDE 和三角形 DFG 重合. (即割下三角形 BDE 補到三角形 DFG 的位置)



由於 $\angle EDF=90^\circ$ ，所以 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$ ，所以 $\angle ADG$ 是直角，三角形 ADG 是直角三角形，它的直角邊 $AD=20$, $BD=DG=15$ ，由畢氏定理可得斜邊 $AG=25$ 。此時正方形的邊長 DF 恰是直角三角形 ADG 中斜邊 AG 上的高，

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times 25 \times DF = \frac{1}{2} \times 15 \times 20, \text{ 解得 } DF = 12,$$

因此黃色正方形紙片面積是 $12^2 = 144$ （平方釐米）

16. 答案：13.

解答：方法 1:

把 $c = 5d + 10$ 代入 $b = 3c - 18$ ，得到 $b = 3(5d + 10) - 18 = 15d + 12$ ，代入

$$a = 2b + 8, a = 2(15d + 12) + 8 = 30d + 32,$$

$$\text{所以 } |d + 7a| = |d + 210d + 224| = |211d + 224|,$$

因為 d 為整數，所以 $d = -1$ 時， $|d + 7a|$ 取得最小值，此時值為 13.

方法 2：

因為 $c = \frac{b}{3} + 6$ 所以， b 是 3 的倍數，

因為 $d = \frac{c}{5} - 2$ 所以， c 是 5 的倍數，

$$d+7a = \frac{c}{5} - 2 + 7a = \frac{b}{15} + \frac{6}{5} - 2 + 7a = \frac{b}{15} + \frac{6}{5} - 2 + 14b + 56 = \frac{b+3}{15} + 14b + 55$$

由 a, b, c, d 是整數，

3 整除 b ，5 整除 $b+3$ ，令 $b=3p$ ，其中 p 為 5 的倍數，所以上式等於

$$\frac{p+1}{5} + 42p + 55 = d + 7a, \text{ 其中 } p \text{ 為 } 5 \text{ 的倍數,}$$

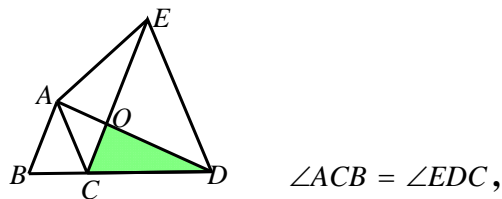
當 p 增時， $d+7a$ 也增， $p=-1$ 時， $d+7a=13$ ， $p=-6$ 時， $d+7a=-198$ ， $p=4$ 時， $d+7a=224$ ，所以， $d+7a$ 的絕

對值的最小值等於 13.

三、解答下列各題（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

17. 答案：42 cm²

解答：記三角形 COD 的面積為 x cm².



因為等腰三角形的頂角相等，所以

$$\angle ABC = \angle ECD.$$

所以 $AC \parallel DE$, $AB \parallel CE$.

所以 $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COD}$.

$$\text{又 } \frac{OC}{CE} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle CDE}}, \quad \frac{OE}{CE} = \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle EAC}} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle EAC}},$$

因為三角形 EAC 在邊 AC 上的高和三角形 CDE 在邊 DE 上的高相等，

$$\text{所以 } \frac{OC}{OE} = \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{1}{2}, \text{ 可以得到 } OE = 2OC.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle CDE} = 3S_{\triangle COD} = 3x, \quad S_{\triangle EAC} = \frac{1}{2} S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} (S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE}) = \frac{3}{2} x.$$

$$\text{因為 } \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{OC}{OE} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{因為 } AB \parallel CE, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} (S_{\triangle AOC} + S_{\triangle OAE}) = \frac{3}{4} x.$$

$$\text{所以 } S_{\text{四邊形 } ABCDE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOE} = \frac{3}{4} x + \frac{3}{2} x + x + 2x.$$

因為 $x = 8$ ，即四邊形 $ABDE$ 的面積為 42cm².

18. 答案：(1) 30

解答：記紅球、黃球和藍球分別分了 i, j, k 組，每組的盒子數目分別為

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \quad b_1, b_2, \dots, b_j, \quad c_1, c_2, \dots, c_k,$$

令 $n = i + j + k$.

1) 因為 $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j, c_1, c_2, \dots, c_k$ 包含了 1 到 30 的所有整數, 所以 $n \geq 30$. 另一方面,

$$\begin{aligned} 3 \times 155 &= a_1 + a_2 + \dots + a_i + b_1 + b_2 + \dots + b_j + c_1 + c_2 + \dots + c_k \\ &\geq 1 + 2 + \dots + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465 = 3 \times 155, \end{aligned}$$

所以 $n = i + j + k = 30$, 三種分組方法分組的組數之和是 30.

2) 不妨設 $a_1 = 30$, 記這 30 個盒子的組為 A 組. 因為 $i + j + k = 30$, 必有 $j \leq 14$ 或 $k \leq 14$, 不妨設 $j \leq 14$. A 組的 30 個盒子分到這不超過 14 個組中去, 必有一組至少有三個盒子, 這三個盒子裡的紅球數相同並且黃球數也相同.