第十八屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案

（小學高年級組）

一、填空題（每題 10 分，共 120 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	4 , 4	48	4	27	1	3456	25	2, 3	12	62	74	54

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13.

解答. 例如

$$(4+4+4)\div 4=3,$$

$$4-(4-4)\times 4=4,$$

$$(4\times 4+4)\div 4=5,$$

$$(4+4)\div 4+4=6.$$

14. 答案：25

解答. 設比小明小的學生為 x 人，比小華小的學生為 y 人. 因為比小明大的學生為 $2x$ 人，所以全班學生共 $N=3x+1$ 人；又因為比小華大的學生為 $3y$ 人，所以全班學生共 $N=4y+1$ 人. 這樣，$N-1$ 既是 3 的倍數，又是 4 的倍數，因此 $N-1$ 是 $3\times 4=12$ 的倍數. 這個班學生人數大於 20 而小於 30，所以 $N-1$ 只可能是 24. 因此這個班共有學生 $N=24+1=25$ 人.

15. 答案：1.375

解答. 小虎划船的全部時間為 120 分鐘，他每劃行 30 分鐘，休息 10 分鐘，週期為 40 分鐘，所以一共可分為 3 個 30 分鐘劃行時間段，有 3 個 10 分鐘休息 划船時，順水的船速與逆水的船速之比為 4.5:1.5=3:1. 因為小虎要把船劃到離租船處盡可能遠，他在划船的過程中只能換一次划船的方向，而且是在盡可能遠處. 分兩種情況討論.

1) 開始向下游划船，設最遠離租船處 x 千米. 因為回到租船處是逆水，所以小虎只有 110 分鐘可用. 由於划船時順流速度是逆流速度的 3 倍，所以用在向下游划船的時間不能超過半小時. 另外兩次休息時間只能用在返程，在休息期間內船向下游漂流了 $\frac{1}{3}\times1.5$，所以

$$x\div4.5+\left(x+\frac{1}{3}\times1.5\right)\div1.5=1.5.$$

整理上式得

$$x+3x+1.5=6.75,\quad 4x=5.25,\quad x=1.3125\ \text{(千米)}.$$

2) 開始向上游劃，設最遠離租船處 y 千米. 小虎可用 120 分鐘，有兩次休息時間用在向上游. 所以

$$\left(y+\frac{1}{3}\times1.5\right)\div1.5+\left(y-\frac{1}{6}\times1.5\right)\div4.5=1.5.$$

整理上式得

$$4y+\frac{5}{6}\times1.5=6.75,\quad 4y=5.5,\quad y=1.375\ \text{(千米)}.$$

綜合 1) 和 2) 的討論，小虎的船最多離租船處 1.375 千米.

16. 答案：不能

解答. 設放的最小自然數為 a，則放的最大自然數為 $a+23$. 於是這 24 個數的和為

$$A=12(2a+23).$$

假設可能，設每個正方形邊上的數之和為 S. 因為共有 5 個正方形，這些和的和為 $5S$.因為

每個數在這些和中出現兩次，所以有

$$5S = 2A.$$

記最小的 16 個數的和為 B，則 $B = 8(2a+15)$．下面分兩種情形討論:

(1) 若 $B \le S$，則

$$S = \frac{2}{5}A = \frac{24}{5}(2a+23) \ge 8(2a+15), \quad 9.8a + 110.4 \ge 16a + 120,$$

不存在自然數 a 使得不等式成立.

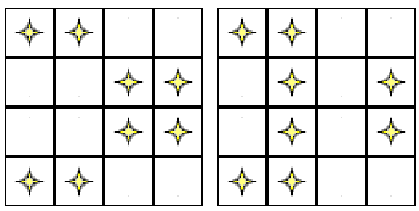
(2) 情形 $B > S$ 也是不可能的，因為此時不可能選擇最大正方形邊上的 16 個數使得這 16 個數的和等於 S．

三、解答下列各題（每題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

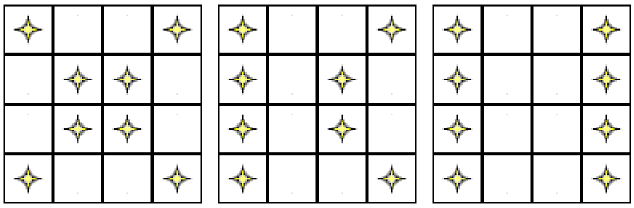
17. 答案：5

解答. 用右圖代替題目中的 2×1 小長方形．因為題目所給的小長方形上下不對稱，所以同一個小長方形在拼成的上下對稱的正方形中，不會既在上半部分也在下半部分．這樣，就可以只考慮上半部分的不同情形.

1) 相鄰的空白格在第一行最左邊或最右邊．因為要排除旋轉相同的，所以只考慮相鄰空白格在最右邊的情況，有下圖所示的 2 種圖形，



2) 相鄰的空白格在第一行中間．去掉旋轉重合的，有下圖所示的 3 種圖形，



所有不同的圖形為 5 種.

18. 答案：6036

解答. 令

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2012} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2013},$$

其中, 所有的 a_i 數字和相同, 所有的 b_j 數字和相同, 所有的 c_k 數位和相同. 兩個自然數數位的和相同, 則它們除以 9 的餘數相同, 即

$$a_i = 9u_i + r, \quad i = 1, 2, \cdots, 2010,$$

$$b_j = 9v_j + s, \quad j = 1, 2, \cdots, 2012,$$

$$c_k = 9w_k + t, \quad k = 1, 2, \cdots, 2013.$$

則

$$\begin{aligned} n &= 9\times(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2010}) + 2010\times r \\ &= 9\times(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012}) + 2012\times s \\ &= 9\times(w_1 + w_2 + \cdots + w_{2013}) + 2013\times t, \end{aligned} \tag{1}$$

由上面的等式可得,

$$9\times(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2010} + 223\times r) + 3r = 9\times(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012} + 223\times s) + 5\times s, \tag{2}$$

$$9\times(w_1 + w_2 + \cdots + w_{2013} + 223\times t) + 6\times t = 9\times(v_1 + v_2 + \cdots + v_{2012} + 223\times s) + 5\times s, \tag{3}$$

由 (2) 可以得出 s 是 3 的倍數, 只能是 0, 3 或 6. 下面三種情況討論:

1） $s=0$．此時，對 $j=1, 2, \cdots, 2012$，因為 $b_j=9v_j$ 的數字和不為零，所以 $v_j \geq 1$．則

$$n=9\times(v_1+v_2+\cdots+v_{2012}) \geq 9\times 2012=18108.$$

2） $s=6$．此時

$$n=9(v_1+v_2+\cdots+v_{2012})+2012\times 6 \geq 12072.$$

3） $s=3$，此時

$$n=9(v_1+v_2+\cdots+v_{2012})+2012\times 3 \geq 6036.$$

可以取 $r=2, t=1$．而

$$\begin{aligned}6036&=\underbrace{3+3+\cdots+3}_{2012\text{个}}=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{x\text{个}}+\underbrace{11+11+\cdots+11}_{y\text{个}}\\&=\underbrace{10+10+\cdots+10}_{m\text{个}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}.\end{aligned}$$

下面計算 x, y 與 m, n,

$$\begin{cases}x+y=2010,\\2x+11y=6036,\end{cases}\qquad\begin{cases}m+n=2013,\\10m+n=6036,\end{cases}$$

解得

$$x=1786,\quad y=224,\quad m=447,\quad n=1566.$$

即

$$6036=2\times 1786+11\times 224=10\times 447+1566=3\times 2012.$$

最終，滿足條件的最小自然數是 6036.