第十七屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽筆試試題 A 參考答案

（初一組）

一、填空（每題 10 分，共 120 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	$\frac{1}{2012}$	4048144	2012	2023066	-16	$-\frac{3}{5}$	30°	4	71	4	231	11

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13. 答案：原方程組有兩組解： $x=\frac{1}{2}, y=0;\quad x=-\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$

解答： 由第二個方程解得 $y=1-2x$ （1）

將（1）代入第一個方程，得到

$|x+3(1-2x)|+|\,x|5-(1\;x\;2)$

即 $|3-5x|+|7x+1|=5$ （2）

分以下幾種情形討論：

（i）當 $3-5x>0\quad(x<\frac{3}{5})$ 和 $7x+1>0\quad(x>-\frac{1}{7})$ 時，

方程（2）化為 $3-5x+7x+1=5 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

因為 $-\frac{1}{7}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$，故（2）有解 $x=\frac{1}{2}$，從而 $y=0$.

（ii）當 $3-5x<0\quad(x>\frac{3}{5})$ 和 $7x+1>0\quad(x>-\frac{1}{7})$ 時，即 $x>\frac{3}{5}$ 時，

方程（2）化為 $5x-3+7x+1=5 \Rightarrow 12x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{12}$.

因為 $\frac{7}{12}<\frac{3}{5}$， 故 $x=\frac{7}{12}$ 不是（2）的解.

（iii）當 $3-5x>0\quad(x<\frac{3}{5})$ 和 $7x+1<0\quad(x<-\frac{1}{7})$ 時，即 $x<-\frac{1}{7}$ 時，

方程(2)化為 $3-5x-7x-1=5 \Rightarrow -12x=3 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

因為 $-\frac{1}{4}<-\frac{1}{7}$，故得解 $x=-\frac{1}{4}$. 從而 $y=\frac{3}{2}$.

還有一種情況也無解.

所以，原方程組有兩組解： $x=\frac{1}{2}, y=0$; $x=-\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$.

14. 答案：沒有

解答： $2000 \le 3^m-3^n \le 2099$， 而 $3^m-3^{m-1} \le 3^m-3^n \le 3^m-3$， 因此有

$$\begin{cases} 3^m-3^{m-1} \le 2099 \\ 3^m-3 \ge 2000 \end{cases}, \quad \frac{2000}{3} \le 3^{m-1} \le \frac{2099}{2}, \quad \text{即 } 667 \le 3^{m-1} \le 1049$$

那麼我們會發現， 只有 $3^6=729$ 滿足條件， 因此 $m-1=6$， $m=7$.

$2000 \le 2187-3^n \le 2099$， $88 \le 3^n \le 187$， 而 $3^4=81$ 、 $3^5=243$， 因此沒有滿足條件的 n， 因此在本世紀中， 沒有一個年份可以表示成 3^m-3^n 的形式.

15. 答案：11 個解；分別是 $-12,-6,-4,-3,-2,-\frac{12}{5},-\frac{12}{7},-\frac{12}{11},-\frac{6}{5}-\frac{4}{3},-\frac{3}{2}$

解答：令 $x=\frac{q}{p}$， p,q 為整數， $q \ge 1$, $(p,q)=1$. 代入給定方程， 得到

$$\frac{q}{p}\cdot[\frac{11p}{q}]=12 \quad \Rightarrow \quad q\cdot[\frac{11p}{q}]=12\cdot p \qquad (1)$$

因為 $(p,q)=1$， 故 $q\,|\,12$， 12 的因數有 $1,2,3,4,6,12$

(i) 當 $q=12$ 時， 由(1)可得

$$[\frac{11p}{12}]=p \quad \Rightarrow \quad [p-\frac{p}{12}]=p \Rightarrow \quad [-\frac{p}{12}]=0$$

$$\therefore \quad 0<-\frac{p}{12}<1 \quad \Rightarrow \quad -1<\frac{p}{12}<0 \quad \Rightarrow \quad -12<p<0$$

再由 $(p,q)=1$， 得到 $p=-1,-5,-7,-11$.

(ii) 當 $q=6$ 時， 由(1)得

$$[\frac{11p}{6}]=2p \quad \Rightarrow \quad [2p-\frac{p}{6}]=2p \Rightarrow \quad [-\frac{p}{6}]=0 \quad \Rightarrow \quad -6<p<0$$

再由$(p,q)=1$，得到　　$p=-1,-5$

（iii）當$q=4$時，由（1）得

$$[\frac{11p}{4}]=3p \quad\Rightarrow\quad [3p-\frac{p}{4}]=3p \Rightarrow \quad [-\frac{p}{4}]=0 \quad\Rightarrow\quad -4<p<0$$

再由$(p,q)=1$，得到　　$p=-1,-3$

（iv）當$q=3$時，由（1）得

$$[\frac{11p}{3}]=4p \quad\Rightarrow\quad [-\frac{1}{3}p]=0$$

由此得到　$p=-1,-2$

（v）當$q=2$時，由（2）得

$$[\frac{11p}{2}]=6p \quad\Rightarrow\quad [-\frac{p}{2}]=0 \quad\Rightarrow\quad p=-1$$

故所給解方程一共有 11 個解：

$$-12,-6,-4,-3,-2,-\frac{12}{5},-\frac{12}{7},-\frac{12}{11},-\frac{6}{5}-\frac{4}{3},-\frac{3}{2}$$

16. 答案：$\frac{2}{5}$（添上 6），$\frac{4}{8}$（添上 9），$\frac{1}{4}$（添上 6）和$\frac{1}{5}$（添上 9）

解答：我們首先考慮滿足$\frac{x}{z}=\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}}$的一位元正整數$x,y,z$，其中$\overline{xy}=10x+y$，$\overline{yz}=10y+z$．乘開可得$10xy+xz=10xz+yz$，因此$x=\frac{yz}{10y-9z}$．由於$y,z$都是一位數，且$10y-9z>0$，故$y\ge z$，由於當$y=z$時，$x=y=z$，不合題意，故有$y>z$．

若$y=z+1$，代入$x=\frac{yz}{10y-9z}$得$x=\frac{z(z+1)}{z+10}=z-9+\frac{90}{z+10}$，這說明$z+10$是 90 的約數.而在 11 到 19 之間，90 的約數僅有 15 和 18，故$z=5$或$z=8$，分別解得$x=2$和$x=4$．

若$y=z+2$，代入$x=\frac{yz}{10y-9z}$得$x=\frac{z(z+2)}{z+20}=z-18+\frac{360}{z+20}$，這說明$z+20$是 360 的約數．而在 21 到 29 之間，360 的約數僅有 24，故$z=4$，解得$x=1$．

若$y\ge z+3$，則$x=\frac{yz}{10y-9z}=\frac{yz}{y+27}<\frac{yz}{3y}=\frac{z}{3}\le 2$，因此$x=1$，故$yz=10y-9z$，故$10y=(y+9)z$．由於$y>1$，故$y+9>10$，因此$(y,y+9)>1$，這說明$y$是 3 的倍數，分別取$y=3,6,9$得$z=\frac{3}{2},4,5$，僅有$y=9,z=5$符合條件.

綜上所述，所有具有題目所述特性的分數為$\frac{2}{5}$（添上 6），$\frac{4}{8}$（添上 9），$\frac{1}{4}$（添上 6）

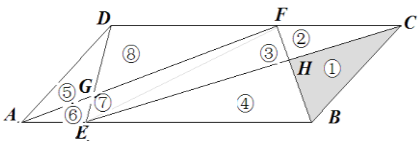
和$\frac{1}{5}$（添上 9）.

三、解答下列各題（每題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

17. 答案：$\frac{7}{92}$

解答：三角形 ADG 的面積是$\frac{7}{92}$.

設 $DF=x$, $FC=y$, $\frac{x}{y}=z$ ，連接 EF. 如圖所



設，由已知條件 $ABCD$ 是平行四邊形，且面積為 1 和三角形面積公式，可得到：

三角形 BHC 的面積=①＝③＝$\frac{1}{8}$,

並且

②＋①＝$\frac{1}{2}\times\frac{y}{x+y}$，④＋①＝$\frac{2}{5}$， ②/③＝①/④,即②×④＝$\frac{1}{64}$.

將②＝$\frac{1}{2}\times\frac{y}{x+y}-\frac{1}{8}$,④＝$\frac{2}{5}-\frac{1}{8}=\frac{11}{40}$代入②×④＝$\frac{1}{64}$，馬上得到：

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{y}{x+y}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{11}{40}=\frac{1}{64},$$

可得

$$11\times\left(4\times\frac{y}{x+y}-1\right)=5,\ 4\times\frac{1}{z+1}=\frac{5}{11}+1,\ \frac{1}{z+1}=\frac{4}{11},\ z=\frac{7}{4}$$

類似可得

⑤+⑧＝$\frac{7}{22}$，⑦+⑥＝$\frac{1}{10}$，⑤×⑦＝⑥×⑧，⑤＝⑦.

從上面四個等式，可以得到：

⑤×⑤＝（$\frac{1}{10}$－⑤）×（$\frac{7}{22}$－⑤），

解上面關於⑤的方程,

$$⑤=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{7}{22}}{\frac{1}{10}+\frac{7}{22}}=\frac{7}{92},$$

三角形 ADG 的面積是 $\frac{7}{92}$.

18. 答案: 8

解答： 一個點連的線段的另一端點的編號小於它的編號，我們稱這條線段為該點發出的“好線”. 每個好點，發出的“好線”的條數不小於 $\left[\frac{k}{2}\right]+1$，令 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數， $\{x\}=x-[x]$ 。

編號為 n 的點發出的連線都是好線，其它 4 個好點發出的連線的條數大於等於

$$4\times\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)\geq 4\times\frac{k+1}{2}=2k+2$$

由於 5 個好點發出的好線的條數小於所有的連線數 $\frac{nk}{2}$ ，所以

$k+2k+2<\frac{nk}{2}$ ，

$4<k(n-6)$ (*)

另外, 設好點中最小編號為 m , 則編號為 $1, 2, \cdots, m-1$ 的點都不是好點，而非好點的總數是 $n-5$，所以， $m-1\leq n-5$. 此外，第 m 號點最多只能發出 $m-1$ 條好線，因此，

$$[\frac{k}{2}]+1\leq m-1\leq n-5.$$

$$\frac{k}{2}-\{\frac{k}{2}\}+1\leq n-5$$

$$\frac{k}{2}\leq n-5-1+\left\{\frac{k}{2}\right\}\leq\frac{2n-11}{2},\qquad k\leq 2n-11. \qquad (**)$$

由(*)和(**),

$4<(2n-11)(n-6)$, 不難验证, $n\geq 8$ 不等式才能成立.

下面例子說明,n=8 是可以達到的.

現設 n=8,取 k=3,有

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				*	*	*		
2				*	*			*
3				*			*	*
4	*	*	*					
u5	*	*				*		
6	*				*		*	
7			*			*		*
8		*	*				*	

*表示編號等於行號和列號的兩個點連線.