

第十七屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽筆試試題 A 參考答案

(小學高年級組)

一、填空 (每題 10 分, 共 120 分)

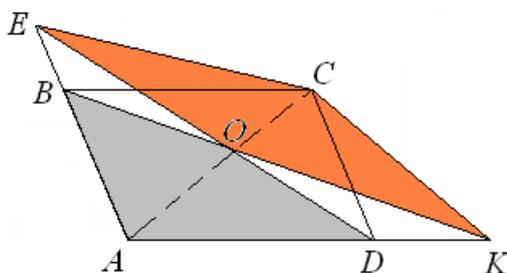
題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	102	4	8	161	9.3	1:2	40	153	7	18	7	4396

二、解答下列各題 (每題 10 分, 共 40 分, 要求寫出簡要過程)

13. 答案：是.

解答. 連接 AC. 則

$$\begin{aligned}
 S_{ECKB} &= S_{\triangle CEB} + S_{\triangle BCK} \\
 &= S_{\triangle CEB} + S_{\triangle BCA} \\
 &= S_{\triangle ACE} = S_{\triangle EAD}
 \end{aligned}$$



所以

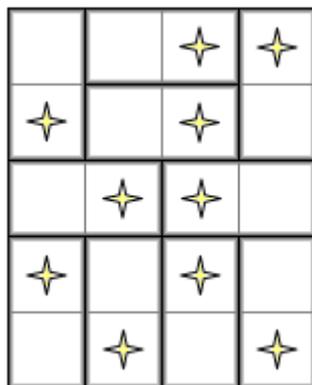
$$S_{ECKB} - S_{\triangle OBE} = S_{\triangle EAD} - S_{\triangle OBE}.$$

因此 $S_{ECKO} = S_{ABOD}$. 即

四邊形 $ABOD$ 的面積 = 四邊形 $ECKO$ 的面積.

14. 答案：能

解答. 首先構造 5×4 的長方形如下:



然後用 50 個 5×4 的即可拼成 5×200 的長方形.

15. 答案：2025, 3025, 9801.

解答. 設一個四位卡布列克怪數為 $100x+y$, 其中 $10 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$. 則由題意知 $100x+y=(x+y)^2$, 兩邊模 99 得

$$x+y=(x+y)^2 \pmod{99},$$

因此 $99|(x+y)(x+y-1)$, 故 $x+y$ 與 $x+y-1$ 中有一個能被 9 整除, 也有一個能被 11 整除 (可能是同一個數), 且有 $10^2 \leq (x+y)^2 = 100x+y < 100^2$, 即

$$10 \leq x+y < 100. \quad (*)$$

若 $x+y$ 能被 99 整除, 由 (*) 知 $x+y$ 只能是 99, 滿足條件的四位數是 9801; 若 $x+y-1$ 能被 99 整除, 由 (*), 顯然沒有滿足條件的四位數; 此外, 可設 $x+y=9m$, $x+y-1=11n$, 則有 $9m-11n=1$, 由 (*), m 和 n 均為小於 12 的正整數, 故得到 $m=5, n=4$, $x+y$ 只能是 45, 滿足條件的四位數是 2025; 反之, 可設 $x+y-1=9m$, $x+y=11n$, 滿足條件的四位數是 3025.

故四位數中有三個卡布列克怪數, 它們分別為 2025, 3025 和 9801.

16. 答案：1 或 2

解答. 對於質數 3, 3^2 被 3 整除. 其餘的質數, 要麼是 $3k+1$ 型的數, 要麼是 $3k+2$ 型的數. 由於

$$(3k+1)^2 = 9k+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1,$$

被 3 除餘 1, 且

人同時在劃定區域內跑持續時間為 11 秒或 3 秒. 其它情況類似可得同樣結果.

綜上, 答案為 3,9,11,18.

18. 答案: 150

解答. 設立方體的長, 寬, 高分別為 z, y, x , 其中 $x \leq y \leq z$, 且為整數. 注意, 兩面有紅色的小立方塊只能在長方體的棱上出現.

如果 $x=1, y=1$, 則沒有兩面為紅色的立方塊, 不符合題意.

如果 $x=1, y>1$, 則沒有只有一面為紅色的立方塊, 不符合題意.

因此 $x \geq 2$. 此時兩面出現紅色的方塊只能與長方體的棱共棱. 一面出現紅色的方塊只與立方體的面共面. 有下面的式子成立

$$4 \times [(x-2) + (y-2) + (z-2)] = 40, \quad (1)$$

$$2 \times [(x-2)(y-2) + (x-2)(z-2) + (y-2)(z-2)] = 66. \quad (2)$$

由 (1) 得到

$$x + y + z = 16, \quad (3)$$

由 (2) 得到

$$xy + xz + yz = 85. \quad (4)$$

由 (3) 和 (4) 可得, $x^2 + y^2 + z^2 = 86$, 這樣 $1 \leq x, y, z \leq 9$. 由 (4) 得到

$$(x+y)(x+z) = 85 + x^2. \quad (5)$$

若 $x=2$, 則由 (5) 得到 $(2+y)(2+z) = 85 + 4 = 89 = 1 \times 89$, y, z 的取值不能滿足 (3).

若 $x=3$, 則由 (5) 得到 $(3+y)(3+z) = 85 + 9 = 94 = 2 \times 47$, y, z 的取值不能滿足 (3).

若 $x=4$, 則由 (5) 得到 $(4+y)(4+z) = 85 + 16 = 101 = 1 \times 101$, y, z 的取值不能滿足 (3).

當 $x = 5$ 時, 由 (5) 得到 $(5 + y)(5 + z) = 85 + 25 = 110 = 2 \times 5 \times 11$, 此時 $y = 5, z = 6$ 滿足條件.

如果 $x \geq 6$, 則 $x + y + z \geq 18$, 與 (3) 矛盾.

綜上, $x = 5, y = 5, z = 6$ 是問題的解, 這是長方體的體積為 150.