第十六屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 **A** 參考答案（初中組）

一、 **填空題** (每小題 10 分，共 120 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	2019044	9	653	24	$\frac{24}{919}$	8547	10	15	21	10	402	13

二、 **解答下列各題** (每題 10 分，共 40 分, 要求寫出簡要過程)

13. 答案：121

解：（圖 1 與圖 2 供考生答題用）如圖 2，S=A+B+C+D+E+F+G+H+I

4S=4(A+B+C+D+E+F+G+H+I)

=(A+B+D+E)+(B+C+E+F)+(D+E+G+H)+(E+F+H+I)+ 2(A+B+C+D+F+G+H+I)+(A+C+G+I)

=400+2(A+B+C+D+F+G+H+I)+(A+C+G+I)

由於 A,B,C,D,F,G,H,I 為各不相同的正整數，

1	9	2
6	84	5
3	7	4

圖 1

A	B	C
D	E	F
G	H	I

圖 2

有：A+B+C+D+F+G+H+I⩾1+2+3+⋯+8=36，A+C+G+I⩾1+2+3+4=10

所以，4S⩾400+2x36+10=482，即 S⩾120.5

因為 S 為整數，有 S⩾121．

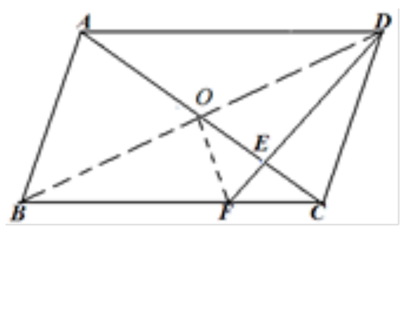
另一方面，可以如圖 1 填數使得 S=121．

綜上所述，表格中所填 9 個正整數總和的最小值為 121．

14. 答案 $\frac{1}{40}$

解答 設平行四邊形兩條對角線交點為 O，連接 OF， $S_{\Delta CEF}=x$ $S_{\Delta CDE}=y$, $S_{\Delta DOE}=z$，

$S_{\Delta EOF}=w$.



由右圖和三角形面積公式：

$y+\ z=S_{\Delta CDO}=\frac{1}{4}$，

$x+y=S_{\Delta CDF}=\frac{1}{8}$，

$x+w=S_{\Delta COF}=\frac{1}{16}$.

再次應用三角形面積公式，

$$\frac{x}{y}=\frac{w}{z}=\frac{EF}{DE}. \qquad (*)$$

將 y,z,w 用 x 表達，

$$y=\frac{1}{8}-x,\ w=\frac{1}{16}-x,\ z=x+\frac{1}{8}$$

代入(*)式，並整理，可得： $\dfrac{x}{\frac{1}{8}-x}=\dfrac{\frac{1}{16}-x}{\frac{1}{8}+x}$, $x=\dfrac{1}{40}$.

答：三角形 CEF 的面積是 $\dfrac{1}{40}$.

15. 答案：4

解：由原方程，我們有

$$(3-\frac{8}{p})^3\le(3-\frac{8}{m})(3-\frac{8}{n})(3-\frac{8}{p})=1$$

所以，$(3-\dfrac{8}{p})\le 1,\ p\le 4$

若 $p=4$，則

$$1=(3-\frac{8}{m})(3-\frac{8}{n})(3-\frac{8}{p})=(3-\frac{8}{m})(3-\frac{8}{n}),m\ge n\ge 4$$

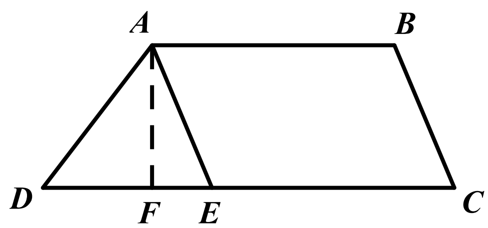
上式只有 $m=n=4$ 時成立。

所以，p 的最大值是 4。

16. 答案：ABCE 的面積是 $618\frac{2}{3}$ (平方米)

三角形 ADE 的面積是 $266\frac{2}{3}$ (平方米)

梯形的 ABCD 面積是 $885\frac{1}{3}$ (平方米)



解：因為 AE=BC=$\dfrac{80}{3}$(米), DE=CD-CE=$\dfrac{100}{3}$(米),

所以 $\left(\dfrac{100}{3}\right)^2+\left(\dfrac{80}{3}\right)^2-(20)^2=2\times EF\times\dfrac{100}{3}$ （*）

EF=$\dfrac{64}{3}$(米)，因此 AF=16(米).

平行四邊形 ABCE 的面積是 $\dfrac{116}{3}\times16=618\dfrac{2}{3}$ (平方米)

三角形 ADE 的面積是 $(72-\dfrac{116}{3})\times16\times\dfrac{1}{2}=266\dfrac{2}{3}$ (平方米)

梯形的 ABCD 面積是 $885\frac{1}{3}$(平方米)。

（*）成立的原因如下，因為

$(\mathrm{AE})^2=(AF)^2+(EF)^2$,

$(AD)^2=(AF)^2+(DF)^2$,

$(DE)^2=((DF)+(EF)\ )^2$

$=(DF)^2+2\cdot(\mathrm{DF})\cdot(\mathrm{EF})+(\mathrm{EF})^2$

所以

$(\mathrm{DE})^2+(\mathrm{AE})^2-(AD)^2=2(DF)\ \times(\mathrm{EF})+2(\mathrm{EF})^2=2(EF)((DF)+(EF)\ )=$
$2(\mathrm{EF})\cdot(DE)$

三、　解答下列各題 (每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程)

17. 答：$\frac{1}{2}$平方釐米.

解：如圖，連接 $AF, AE,$ 則$\Delta ADF, \Delta AFE, \Delta AEB$都是頂角為$30^{\circ}$，兩腰為 1 釐米的等腰三角形.其面積相等.

自點 F 作 $FP\perp AD$ 於 P. 則 $FP=\frac{1}{2}$,因此

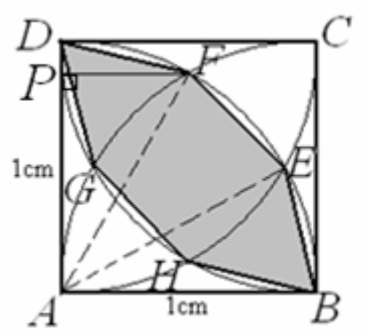
三角形 ADF 的面積$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 所以五邊形 $ABEFD$ 的面積=$\frac{3}{4}$（平方釐米）. 同理，

五邊形 $BCDGH$ 的面積=$\frac{3}{4}$（平方釐米）.

而正方形 $ABCD$ 的面積為 1 平方釐米.

由面積重疊原理可知，重疊部分為陰影六邊形 $BEFDGH$，

它的面積為 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}$（平方釐米）.



18. 答案：不存在

解：若存在整數m使得$x^4+\frac{1}{x^4}$為完全平方數，則設存在正整數n使得，

$x^4+\frac{1}{x^4}=n^2$.

因為$x-\frac{1}{x}=m$，所以$x^2+\frac{1}{x^2}=m^2+2$.

所以$x^4+\frac{1}{x^4}=(m^2+2)^2-2$.

所以$(m^2+2)^2-2=n^2$.

即$(m^2+2-n)(m^2+n)=2$.

因為m^2+2-n與m^2+2+n的奇偶性相同，且 2 是偶數，所以m^2+2-n與m^2+2+n都是偶數.

因為$(m^2+2-n)(m^2+n)$是 4 的倍數，但是 2 不是 4 的倍數，矛盾！

所以不存在整數m使得$x^4+\dfrac{1}{x^4}$為完全平方數.