

第十六屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案（小學組）

一、 填空題（每小題 10 分，共 120 分）

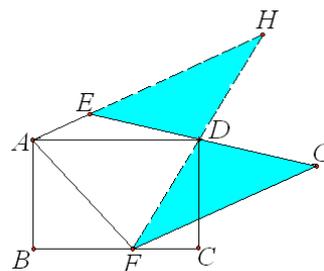
題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	2019045	50	2011	9	$18\frac{23}{24}$	70	45	12	2.094	5	$\frac{8000}{3}$	10

二、 解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13. 答案： 2011 平方釐米.

解答. 連接 FD 的直線與 AE 的延長線相交於 H . 則 $\triangle DFG$ 繞點 D 逆時針旋轉 180° 與 $\triangle DHE$ 重合, $DF=DH$, $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle ADH}$.

梯形 $AEGF$ 的面積
 $=\triangle AFH$ 的面積 $=2 \times \triangle AFD$ 的面積
 $=$ 長方形 $ABCD$ 的面積 $=2011$ (平方釐米).



14. 答案： 13 種可能.

解答. 分幾種情形考慮.

第一種情形: 線路號的數位中沒有螢光管壞了. 只有 351 一個可能線路號.

第二種情形: 線路號的數位中有 1 支螢光管壞了.

壞在第一位數位上, 可能的數字為 9, 線路號可能是 951;

壞在第二位元數字上, 可能的數字為 6,9, 線路號可能是 361, 391;

壞在第三位元數字上, 可能的數字為 7, 線路號可能是 357.

第三種情形: 線路號的數位中有 2 支螢光管壞了.

都壞在第一位數字上, 可能的數字為 8, 線路號可能是 851;

都壞在第二位元數字上, 可能的數字為 8, 線路號可能是 381;

都壞在第三位元數字上, 可能的數字為 4, 線路號可能是 354;

壞在第一、二位元數位上, 第一位數位可能的數位為 9, 第二位元數位可能的數位為 6, 9, 線路號可能是 961, 991;

壞在第一、三位元數位上, 第一位數位可能的數位為 9, 第三位元數位可能的數位為 7, 線路號可能是 957;

壞在第二、三位元數位上, 第二位元數位可能的數位為 6, 9, 第三位元數位可能的數位為 7, 線路號可能是 367, 397.

所以可能的線路號有 13 個:

$$351, 354, 357, 361, 367, 381, 391, 397, 851, 951, 957, 961, 991.$$

15. 答案: 3, 5.

解答. 設這個月的第一個星期日是 a 日 ($1 \leq a \leq 7$), 則這個月內星期日的日期是 $7k+a$, k 是自然數, $7k+a \leq 31$. 要求有三個奇數.

當 $a=1$ 時, 要使 $7k+1$ 是奇數, k 為偶數, 即 k 可取 0, 2, 4 三個值, 此時,

$$7k+a=7k+1$$

分別為 1, 15, 29, 這時 20 號是星期五.

當 $a=2$ 時, 要使 $7k+2$ 是奇數, k 為奇數, 即 k 可取 1, 3 兩個值, $7k+2$ 不可能有三個奇數.

當 $a=3$ 時, 要使 $7k+3$ 是奇數, k 為偶數, 即 k 可取 0, 2, 4 三個值, 此時

$$7k+a=7k+3$$

分別為 3, 17, 31, 這時 20 號是星期三.

當 $4 \leq a \leq 7$ 時, $7k+a$ 不可能有三個奇數.

16. 答案: 253.

解: 令 $m=15k$, k 是自然數, 首先考慮滿足下式的最大的 m ,

$$\left[\frac{1}{15} \right] + \left[\frac{2}{15} \right] + \left[\frac{3}{15} \right] + \cdots + \left[\frac{m-1}{15} \right] + \left[\frac{m}{15} \right] \leq 2011.$$

於是

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{15} \right] + \left[\frac{2}{15} \right] + \left[\frac{3}{15} \right] + \cdots + \left[\frac{m-1}{15} \right] + \left[\frac{m}{15} \right] \\ &= 0 \times 15 + 1 \times 15 + 2 \times 15 + \cdots + (k-1) \times 15 + k \\ &= \frac{15k(k-1)}{2} + k = \frac{15k^2 - 13k}{2} \leq 2011. \end{aligned}$$

因此

$$15k^2 - 13k \leq 4022.$$

又

$$15 \times 17^2 - 13 \times 17 = 4114 > 4022, \quad 15 \times 16^2 - 13 \times 16 = 3632 < 4022,$$

得知 k 最大可以取 16. 當 $k=16$ 時, $m=240$. 注意到這時

$$2011 - \frac{15k^2 - 13k}{2} = 2011 - \frac{3632}{2} = 195 = 16 \times 12 + 3.$$

注意到

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{15} \right] + \left[\frac{2}{15} \right] + \cdots + \left[\frac{16 \times 15 - 1}{15} \right] + \left[\frac{16 \times 15}{15} \right] \\ &+ \left[\frac{16 \times 15 + 1}{15} \right] + \left[\frac{16 \times 15 + 2}{15} \right] + \cdots + \left[\frac{16 \times 15 + 12}{15} \right] + \left[\frac{16 \times 15 + 13}{15} \right] \\ &= 1816 + 16 \times 13 = 2024 > 2011 \end{aligned}$$

而

$$\left[\frac{1}{15} \right] + \left[\frac{2}{15} \right] + \left[\frac{3}{15} \right] + \cdots + \left[\frac{16 \times 15 + 12}{15} \right] = 1816 + 16 \times 12 = 2008 < 2011.$$

所以 253 是滿足題目要求的 n 的最小值.

三、 解答下列各題 (每小題 15 分, 共 30 分, 要求寫出詳細過程)

17. 答案: 312

解答. 由於 $2+0+1+1=4$ 且 $0+1+2+3+4+6+7+8+9=40$, $4 \equiv 40 \pmod{9}$, 所以, 九個不同的漢字代表的數字: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

易知: $40-4=36$, $36 \div 9=4$ (次), 說明此算式共發生四次進位.

$$“4=2+2=1+1+2=1+2+1”$$

顯然： $\square_{華}=1$ ，“ $4=2+2$ ”無解

$\square_{華}=1$ ，“ $4=1+1+2$ ”有解

A： $28+937+1046=2011$ ，可組成算式 36 種（ $6 \times 6 \times 1=36$ ）

B： $69+738+1204=2011$ ，可組成算式 48 種（ $6 \times 4 \times 2=48$ ）

C： $79+628+1304=2011$ ，可組成算式 48 種（ $6 \times 4 \times 2=48$ ）

$\square_{華}=1$ ，“ $4=1+2+1$ ”有解

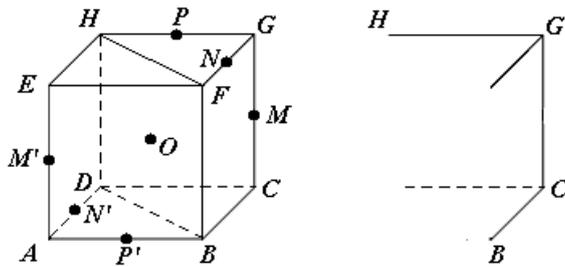
A： $46+872+1093=2011$ ，可組成算式 36 種（ $6 \times 6 \times 1=36$ ）

B： $98+673+1240=2011$ ，可組成算式 72 種（ $6 \times 6 \times 2=72$ ）

C： $97+684+1230=2011$ ，可組成算式 72 種（ $6 \times 6 \times 2=72$ ）

總計： $72 \times 3 + 96 = 216 + 96 = 312$ （種）。

18. 解答. 如左下圖，設 M, N, P 分別為棱 GC, GF, GH 的中點， M', N', P' 分別為棱 AE, AD, AB 的中點， O 為正方體的中心(長方形 $BDHF$ 的中心).



- (1) 第一隻蜘蛛甲可以把爬蟲控制在右上圖所示的範圍內.

首先蜘蛛甲做與爬蟲關於點 O 的對稱方向的移動，不妨設爬蟲由 G 沿棱 GC 向點 M 移動，蜘蛛甲由 A 沿棱 AE 向點 M' 移動，爬蟲被限制在 GM 上. 當爬蟲到達點 M 時，蜘蛛甲也同時到達點 M' . 然後蜘蛛甲改變策略，做與爬蟲關於平面 $BDHF$ 對稱的方向移動.

- a) 當爬蟲到達點 B, D, F, H 時，蜘蛛甲捉住爬蟲.

b) 當爬蟲未到達點 B, D, F, H 時, 爬蟲被控制在左上圖所示的範圍內.

(2) 蜘蛛乙先移動到點 G , 由於右上圖無環路, 蜘蛛乙可以跟在爬蟲後面, 總可以捉住爬蟲.