# 第十五屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

## 決賽試題 A 參考答案（小學組）

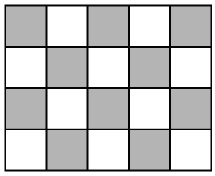
一、　填空題（每小題 10 分，共 120 分）

| 題號 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $\frac{2011}{2012}$ | 3.49 | 8 | 31 | 173 | 19 | 425 | 5 | 223，3 | 32 | 3 | 4 |

**二、解答下列各題** (每題 10 分，共 40 分, 要求寫出簡要過程)

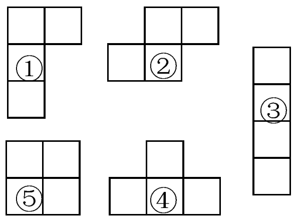
**13. 答案：**不能！

**理由如下：**假設能拼成 4×5 的長方形，如圖 A 小方格黑白相間染色。其中黑格、白格各 10 個。



（圖 A）

將五塊紙板編號，如圖 B 所示，除紙板④之外，其餘 4 張硬紙板每一張都蓋住 2 個黑格，而④蓋住 3 個黑格或一個黑格。這樣一來，由 4 個 1×1 的小正方格組成的不同形狀的 5 個硬紙板，只能蓋住 9 或 11 個黑格，與 10 個黑格不符！




（圖 B）

**14. 答案：**28，$\frac{L}{72}$

**解：**（1）易知 紅線與藍線重合的條數是 $(8,12)-1=3$；

紅線與黑線重合的條數是 $(8,18)-1=2-1=1$；

藍線與黑線重合的條數是 $(12,18)-1=5$；

紅線、藍線、黑線都重合的條數是 $(8,12,18)-1=2-1=1$；

由紅線 7 條，藍線 11 條，黑線 17 條確定的位置的個數是

$$7+11+17-(3+1+5)+1=27.$$

因此，依不同位置的線條鋸開一共得到

$27+1=28$（段）.

（2）最小公倍數 $[8,12,18]=2\times[4,3,9]=2\times36=72$.

因此，將木棍等分成 72 段時，至少有一段是在上述紅、藍、黑線的某兩條之間，並且再短（段數更多）時就做不到了.

所以鋸得的木棍最短的一段的長度是$\dfrac{L}{72}$.

**15. 答案：**5，7.

**解：**設$A$，$B$，$C$，$D$，$E$五隊的總分分別是$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，五隊的總分爲$S$，則$S=a+b+c+d+e=20+e$.

五隊單迴圈共比賽 10 場，則$S\le30$.

如果有一場踢平，則總分$S$減少 1 分.

因爲$a=1=1+0+0+0$，

$b=4=1+1+1+1=3+1+0+0$，

$c=7=3+3+1+0$，

$d=8=3+3+1+1$，

所以比賽至少有 3 場平局，至多有 5 場平局.

所以$30-5\le S\le30-3$，即$25\le20+e\le27$.

故$5\le e\le7$.

事實上，$E$隊勝$A$，$B$，負於$C$隊，與$D$踢平時，$e=7$；

$E$隊勝$A$，負於$C$，但與$B$、$D$踢平時，$e=5$.

所以$E$隊至少得 5 分，至多得 7 分.

**16. 答案：**1163 是質數.

**解：**1163 是質數, 理由如下:

（1）顯然 16424 是大於 2 的偶數, 是合數.

（2）如果 1163 是合數,但不是完全平方數,則至少有 2 個不同的質因數,因爲 $11^3 = 1331 > 1163$,所以,如果 1163 有 3 個以上不同的質因數,必有一個小於 11. 但是顯然 2, 3, 5, 7 都不能整除 1163, 11 也不能整除 1163, 因此 1163 僅有 2 個不同的大於 11 的質因數. 大於 11 的質數是:

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

既然 $1147 = 31 \times 37 < 1163 < 37^2$, 1163 的兩個不同的質因數一定有一個小於 37, 另一個大於 11. 計算

$13 \times 89 = 1157 < 1163 < 1261 = 13 \times 97$；

$17 \times 68 = 1156 < 1163 < 1241 = 17 \times 73$；

$19 \times 61 = 1159 < 1163 < 1273 = 19 \times 67$；

$23 \times 47 = 1081 < 1163 < 1219 = 23 \times 53$；

$29 \times 37 = 1073 < 1163 < 1189 = 29 \times 41$.

所以 1163 是質數.

三、解答下列各題　　（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

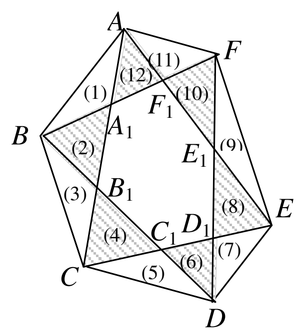
**17. 答案**：670.

**解**：如圖，已知△$ABC$，△$BCD$，△$CDE$，△$DEF$，△$EFA$，△$FAB$ 的面積都等於 335 平方釐米，它們面積之和爲 $335 \times 6 = 2010$ 平方釐米=六邊形 $ABCDEF$ 的面積。

因此，未被蓋住的六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面積

=重疊部分的面積

$= S_{(1)} + S_{(3)} + S_{(5)} + S_{(7)} + S_{(9)} + S_{(11)}$.




另一方面,在△$ABC$ 中, $S_{(1)} + S_{(3)} = 335 - S_{(2)}$,

在△$BCD$ 中, $S_{(3)} + S_{(5)} = 335 - S_{(4)}$,

在△$CDE$ 中, $S_{(5)} + S_{(7)} = 335 - S_{(6)}$,

在△$DEF$ 中，$S_{(7)}+S_{(9)}=335-S_{(8)}$，

在△$EFA$ 中，$S_{(9)}+S_{(11)}=335-S_{(10)}$，

在△$FAB$ 中，$S_{(11)}+S_{(1)}=335-S_{(12)}$，

上述 6 個式子相加，得

$$2\left(S_{(1)}+S_{(3)}+S_{(5)}+S_{(7)}+S_{(9)}+S_{(11)}\right)=335\times5-\left(S_{(2)}+S_{(4)}+S_{(6)}+S_{(8)}+S_{(10)}+S_{(12)}\right)$$

即 $2\left(S_{(1)}+S_{(3)}+S_{(5)}+S_{(7)}+S_{(9)}+S_{(11)}\right)=335\times6-670=1340.$

所以 $S_{(1)}+S_{(3)}+S_{(5)}+S_{(7)}+S_{(9)}+S_{(11)}=\dfrac{1340}{2}=670.$

因此，六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面積

$=S_{(1)}+S_{(3)}+S_{(5)}+S_{(7)}+S_{(9)}+S_{(11)}$ =670(平方釐米).

**18. 答案：**11，12，15，24，36.

**解**：兩位自然數共有 90 個，一個一個地去試算檢驗它是不是滿足條件，工作量太大，顯然需要開動腦筋，縮小試算範圍.

設“虎”、“威”兩個漢字分表代表的數字爲 $a$ ，$b$ . 顯然 $a, b$ 不等於 0.

因爲 $\overline{ab}=10a+b$ ，$10a+b$ 能被 $ab$ 整除意味著 $10a+b$ 能被 $a$ 整除且 $10a+b$ 能被 $b$ 整除.

如果 $10a+b$ 能被 $a$ 整除，說明 $b$ 能被 $a$ 整除；如果 $10a+b$ 能被 $b$ 整除，說明 $10a$ 能被 $b$ 整除.

這就是說，數字 $a$，$b$ 同時要滿足兩個條件：（1）$a$ 整除 $b$，（2）$b$ 整除 $10a$。

對滿足這兩個條件的 $a$，$b$，進行試算，可以縮小試算的範圍。

若 $a$＝1，則 10 能被 $b$ 整除，$b$ 的可能値爲 1，2，5，這時 $\overline{ab}$ ＝11，12，15，它們符合條件；

若 $a$＝2，則 $b$ 是偶數，且 20 能被 $b$ 整除，$b$ 的可能値是 2，4. 經檢驗後知只有 $\overline{ab}$ ＝24 滿足條件；

若 $a=3$，則 $b$ 是 3 的倍數，且 30 能被 $b$ 整除，$b$ 的可能值是 3，6. 經檢驗後知只有

$\overline{ab}=36$ 合於要求；

若 $a=4$，則 $b$ 是 4 的倍數，且 40 能被 $b$ 整除，$b$ 的可能值是 4，8. 經檢驗後它們都不合題意。

若 $a=5$，6，7，8，9，經過同樣的檢驗後知，沒有符合題意的值.

綜上所述知："虎威"代表的兩位數 11，12，15，24，36.