第十三屆“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

決賽試題參考答案（初一組）

一、填空(每題 10 分，共 80 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	1℃	29	8	6	2017036	0	6	4

二、解答下列各題（每題10分，共40分，要求寫出簡要過程）

9. 答案：20,21,22.

解答：設最小角爲 x，最大角爲 $4x$，另一個角爲 y．則由題目的條件得

$$x+y+4x=180,\quad x\le y\le 4x,\quad 4x<90. \qquad ①$$

由①的前兩個式子得到：$6x\le x+y+4x=180\le 9x$，解得 $20\le x\le 30$；又由①的第三個式子得到 $x<22.5$，所以 $20\le x\le 22$.

評分參考：1）給出三個關係①給 4 分；2）得出範圍給 4 分；3）給出答案給 2 分.

10. 答案：10.

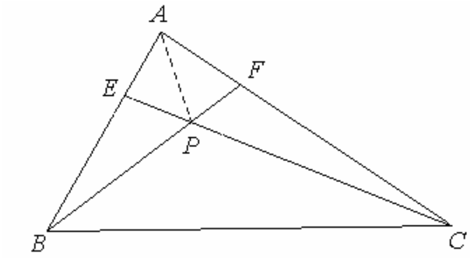
解答：設有n隻猴子, 小明留給自己p個桃子, 每隻猴子分到了 $4p$個桃子. 則$164-p=4pn$，所以p是 4 的倍數．令$p=4p_1$，則 $41-p_1=4p_1n$，$41-p_1$是 4 的倍數．令 $p_1=4k+1$，則

$40-4k=4(4k+1)n$，$n=\dfrac{10-k}{1+4k}$．因爲n是正整數，所以 $k=0$．當 $k=0$ 時，$n=10$.

評分參考：1）給出p, n的關係給 3 分；2）得到n, k的最終關係給 4 分；3）得到答案給 3 分.

11. 答案：4.

解答：設三角形 EBP 的面積爲 X，連接 AP． 若令三角形 APF 的面積爲 Y，則三角形 AEP 的面積爲 $X-Y$． 因爲，



$$S_{\Delta BCF}:S_{\Delta BFA}=S_{\Delta FPC}:S_{\Delta APF}=X:Y,$$

$$S_{\Delta BCE}:S_{\Delta AEC}=S_{\Delta EBP}:S_{\Delta AEP}=X:(X-Y),$$

而 $S_{\Delta BCE}=S_{\Delta BCF}$， $S_{\Delta BFA}=S_{\Delta AEC}=X+X=2X$， 所以有 $X:Y=X:(X-Y)$， 解得 $Y=\dfrac{X}{2}$， 即 $S_{\Delta BCF}:S_{\Delta BFA}=(12+X):2X=X:\dfrac{X}{2}=2:1$． 所以 $X=4$． 三角形 EBP 的面積爲 4.

<u>評分參考</u>：1)引出輔助線給 2 分；2)得到 X 與 Y 的關係式給 4 分；3)得到答案給 4 分.

12. 答案： $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-1$； $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=-1$.

解答：首先必須 $y\neq 0$，否則 $\dfrac{x}{y}$ 沒有意義． 若 $x+y=x-y$，則 $y=0$，矛盾．所以 $x+y\neq x-y$． 若 $x=0$，則由 $x+y=xy$，或 $x-y=xy$ 都得到 $y=0$，所以 $x\neq 0$，即 $xy\neq 0$．因此，三個相等的式子只有兩種可能：

（1） $x+y=xy=\dfrac{x}{y}$．由後一等式得到，$y=1$ 或 $y=-1$． 而 $y=1$ 是不可能的，因爲此時由第一個等式得到 $x+1=x$，矛盾．當 $y=-1$ 時，由第一個等式得到 $x-1=-x$，即 $2x=1$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$.

（2） $x-y=xy=\dfrac{x}{y}$． 由後一等式同樣得到 $y=1$ 或 $y=-1$． 同樣， $y=1$ 是不可能的；而當 $y=-1$ 時，由第一個等式得到 $2x=-1$，所以 $x=-\dfrac{1}{2}$.

<u>評分參考</u>：1) (1)之前給 2 分；2) (1)和(2) 各給 4 分.

三、解答下列各題（每題15分，共30分，要求寫出詳細過程）

13. 答案：6, 10, 13, 14, 16, 18, 19, 22, 24, 25.

解答：設所用的等邊三角形的邊長單位爲 1． 任何滿足條件的六邊形的外接三角形一定是一個邊長爲l的大等邊三角形． 該六邊形可以通過切去邊長分別爲 a, b, c 的等邊三角形的角而得到，其中 a, b, c 爲正整數，並且滿足： $a \ge b \ge c \ge 1$， $l > a+b$．

又由於用邊長爲 1 的等邊三角形拼成的一個邊長爲x（正整數）的等邊三角形所需要的個數是 $1+3+5+\cdots+(2x-1)=x^2$．因此，$n=l^2-(a^2+b^2+c^2)$， 其中 $l \ge 3$， $l > a+b$， $a \ge b \ge c \ge 1$．

(1) $l=3$時，n 可以爲 $3^2-(1^2+1^2+1^2)=9-3=6$．

(2) $l=4$時，n 可以爲

$$4^2-(2^2+1^2+1^2)=16-6=10，\quad 4^2-(1^2+1^2+1^2)=16-3=13.$$

(3) $l=5$時，與上面不同的 n 可以爲

$$5^2-(3^2+1^2+1^2)=25-11=14，\quad 5^2-(2^2+2^2+1^2)=25-9=16，$$

$$5^2-(2^2+1^2+1^2)=25-6=19，\quad 5^2-(1^2+1^2+1^2)=25-3=22.$$

(4) $l=6$時，與上面不同的 n 可以爲

$$6^2-(4^2+1^2+1^2)=36-18=18，\quad 6^2-(3^2+1^2+1^2)=36-11=25，$$

$$6^2-(2^2+2^2+2^2)=36-12=24，\quad 6^2-(2^2+2^2+1^2)=36-9=27.$$

$$6^2-(2^2+1^2+1^2)=36-6=30，\quad 6^2-(1^2+1^2+1^2)=36-3=33.$$

(5) $l=7$時，與上面不同的 n 都比 27 大.

(6) $l \ge 8$時，可以證明滿足要求的 n 都不小於 26.

由(1)到(6)可得，前 10 個滿足要求的 n 爲 6, 10, 13, 14, 16, 18,19, 22, 24, 25.

<u>評分參考</u>: 1)寫出 10 個中的 1 個給 1 分; 2)給出足夠的理由, 例如(1)之前的部分給 5 分.

14. 答案: $y=-\frac{10}{3}$ 或 $y=10$.

解答: 因爲方程左邊的第 1、3 項都是整數, 所以 3y 是整數. 注意到

$$\left[\frac{25+y^2}{25}\right]=\left[1+\frac{y^2}{25}\right]=1+\left[\frac{y^2}{25}\right],$$

代入方程, 得到 $20+3y-10-10\left[\frac{y^2}{25}\right]=0$, $1+\frac{3y}{10}-\left[\frac{y^2}{25}\right]=0$. 所以 $\frac{3y}{10}$ 是整數, 3y 是 10 的倍數. 令 $3y = 10k$, k 是整數, 代入得

$$0=1+k-\left[\frac{100k^2}{9\times 25}\right]=1+k-\left[\frac{4k^2}{9}\right]=1+k-\frac{4k^2}{9}+\left\{\frac{4k^2}{9}\right\},$$

其中, 對於有理數 x, $\{x\}=x-[x]$. 所以有 $1+k-\frac{4k^2}{9}=-\left\{\frac{4k^2}{9}\right\}$, $-1<1+k-\frac{4k^2}{9}\le 0$. 當 k 取不同整數時, $1+k-\frac{4k^2}{9}$ 的情況如下表:

k	≤ -2	$=-1$	$=0$	$=1$	$=2$	$=3$	>3
$1+k-\frac{4k^2}{9}$	<-1	$=-\frac{4}{9}$	$=1$	$=\frac{14}{9}$	$=\frac{11}{9}$	$=0$	<-1

k 的可能値是 -1 和 3, 相應的 $y=-\frac{10}{3}$ 和 $y=10$. 代入驗算得到 $y=-\frac{10}{3}$ 或 $y=10$.

評分參考: 1) 得到 $\frac{3y}{10}$ 是整數給 3 分; 2) 得到關於k的不等式給 5 分; 3)得到列表的結果給 5 分; 3) 每個答案各給 1 分.