

第十三屆“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

決賽試題參考答案（小學組）

一、填空(每題 10 分，共 80 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	2	$\frac{65}{81}$	64	20:39	3	②, ③	9	2005

注：第6題，每答對1個給5分.

二、解答下列各題（每題10分，共40分，要求寫出簡要過程）

9. 答案：2900元.

解答：根據已知條件，五種職位的月薪分別為： A, B, C, D 和 E ，那麼：

$$A+B=3000\dots\dots(1)$$

$$B+C=3200\dots\dots(2)$$

$$C+D=4000\dots\dots(3)$$

$$D+E=5200\dots\dots(4)$$

$$E+A=4400\dots\dots(5)$$

(5)-(1) 得： $E-B=1400$, (4)-(3)+(2) 得： $E+B=4400$. 因此 $E=2900$ (元). 因此，主任的月薪為 2900 元.

評分參考：①每列對一個方程給 1 分；② 正確解出方程給 5 分.

10. 解答：

$$(4 \times 4 + 4) \div 4 = 5, 4 + (4 + 4) \div 4 = 6, 4 + 4 - 4 \div 4 = 7, 4 + 4 + 4 - 4 = 8, 4 + 4 + 4 \div 4 = 9.$$

評分參考：答案不唯一，每列對一個算式給 2 分.

11. 答案：49.5 cm^2 .

解答：如圖 1，連接 AC, FG ，那麼四邊形 $ACGF$ 是梯形，三角形 ACF 和三角形 CAG 同底等高，因而面積相等，因此有

$$S_{\triangle CHG} = S_{\triangle AHF} = 6(\text{cm}^2); (2 \text{分})$$

由於

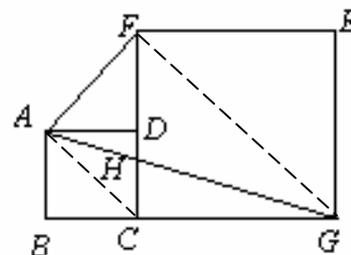


圖 1

$$S_{\triangle CHG} = \frac{1}{2} CH \times CG = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} CF \times CG = \frac{1}{6} CG \times CG = 6(\text{cm}^2).$$

因此， $CG = 6\text{cm}$ ；(2 分) 因為

$$S_{\triangle AHF} = \frac{1}{2} FH \times AD = \frac{1}{2} \times 2CH \times AD = \frac{1}{3} CF \times AD = \frac{1}{3} CG \times AD = 2AD = 6 (\text{cm}^2), \quad (2 \text{分})$$

因此, $AD = 3 \text{ cm}$. 易得 $FD = CF - CD = CG - AD = 3 \text{ cm}$, 所以

$$S_{ABGEF} = S_{ABCD} + S_{CGEF} + S_{\triangle ADF} = 6 \times 6 + 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 49.5 (\text{cm}^2). \quad (4 \text{分})$$

注: 不做輔助線, 通過下面推導同樣可以得出 $S_{\triangle CHG} = S_{\triangle AHF} = 6 (\text{cm}^2)$,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABG} &= \frac{1}{2} AB(CG + BC) = \frac{1}{2} AB \times CG + \frac{1}{2} AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} BC \times CF + \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} (CF + AB) \times BC = S_{\triangle BCF}. \end{aligned}$$

四邊形 $ABCF$ 和三角形 ABG 有公共的部分四邊形 $ABCH$, 因此 $S_{\triangle CHG} = S_{\triangle AHF} = 6 (\text{cm}^2)$

評分參考: ①可依據上述的采分點給分; ② 僅有正確(或猜出)答案, 無過程, 只給 2 分.
③ 步驟正確, 推導合理, 計算錯誤, 適當給分.

12. 答案: 111111, 102564.

解答: 設 $\overline{abcde} = x$, 依題意得 $100000f + x = f(10x + f)$. (3 分)

整理得: $(10f - 1)x = f(100000 - f)$, 其中 $1 \leq f \leq 9$. 當 $f = 1$ 時, $9x = 99999$, 所以 $x = 11111$, 即 $\overline{abcdef} = 111111$; (3 分)

當 $f = 4$ 時, $39x = 4 \times 99996$, 所以 $x = 10256$, 即 $\overline{abcdef} = 102564$; (3 分)

當 $f = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$ 時, x 無整數解. (5 分)

因此, 滿足條件的六位數是 111111 和 102564. (1 分)

評分參考: ①列出解式, 給 3 分; ②能給出全部求解過程, 並判斷正確, 共給 11 分; 計算錯誤, 適當減分; ③最後給出正確答案, 給 1 分; ④僅給出正確答案, 給 5 分.

三、解答下列各題 (每題15分, 共30分, 要求寫出詳細過程)

13. 答案: 甲共走了 $66\frac{2}{11}$ 分鐘, 乙走了 $3833\frac{59}{77}$ 米.

解答: 記跑道周長為 l , 則甲的速度為 $\frac{l}{4}$, 乙的速度為 $\frac{l}{7}$. 甲走完 10 圈需 40 分鐘, 乙走完 10 圈需 70 分鐘, 同向行進時, 甲兩次相鄰追上乙 (同向而行的相鄰兩次擊掌的時間間隔) 所需時間為

$$\frac{l}{\frac{l}{4} - \frac{l}{7}} = \frac{28}{3} \text{ 分鐘}; (2 \text{分}).$$

相向行進時, 甲、乙二人相遇 (擊掌) 到下一次相遇所需時間為

$$\frac{l}{\frac{l}{4} + \frac{l}{7}} = \frac{28}{11} \text{ 分鐘；(2分).}$$

所以在開始 40 分鐘裏，即甲走完 10 圈時，二人擊掌的次數為小於 $40 \div \frac{28}{3}$ 的最大整數次，即 4 次。（2 分）

第 40 分鐘時，乙已走過的路程為 $\frac{l}{7} \times 40 = \frac{40}{7}l$ ，所以甲和乙相距（根據題意，較短的那段）的路程為 $\frac{2}{7}l$ ；（1 分）。從此開始，甲改變行進方向，甲乙相向而行，所以，二人到第 5 次相遇（擊掌）時需 $\frac{28}{11} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{11}$ 分鐘；（1 分）。接下來，二人還需要相遇（擊掌）10 次，需時 $\frac{28}{11} \times 10 = \frac{280}{11}$ 分鐘，（1 分）。因此，二人到第 15 次相遇（擊掌），需要 $40 + \frac{8}{11} + \frac{280}{11} = 66\frac{2}{11}$ 分鐘。（3 分）

因此，甲行走共用了 $66\frac{2}{11}$ 分鐘，此時，乙行走也用了 $66\frac{2}{11}$ 分鐘，因此，乙行走了 $\frac{l}{7} \times 66\frac{2}{11} = \frac{400}{7} \times \frac{738}{11} = 3833\frac{59}{77}$ 米。（3 分）

評分參考：① 可依據上述的采分點給分；② 僅有正確（或猜出）答案，無過程，兩問都對，只給 3 分。③ 步驟正確，推導合理，計算錯誤，適當給分。

14. 答案：647、638 和 836.

解答：

① 因為“夢”、“想”、“成”和“真”代表 2、3、4、5、6、7 和 8 中 4 個不同的數字，並且“夢想成真”所代表的四位數能被 9 整除，因此它們代表的數字的和也能被 9 整除，並且由於 $13 < \text{“夢”} + \text{“想”} + \text{“成”} + \text{“真”} < 27$ ，所以“夢”+“想”+“成”+“真”= 18。（5 分）

② 由 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 和“北”+“京”+“夢”+“想”+“成”+“真”= $1+9+18=28$ ，可以得到“奧”+“運”+“會”= 17，從而“奧”、“運”和“會”所代表的 3 個不同的數字相應地就應當是：{4,6,7}、{4,5,8}、{3,6,8} 和 {2,7,8}。（5 分）

③ 由 {4,6,7}、{4,5,8}、{3,6,8} 和 {2,7,8} 四組數，可以組成 24 個三位數，分別乘 9，僅有 $647 \times 9 = 5823$ ， $638 \times 9 = 5742$ ， $836 \times 9 = 7524$ 符合要求，即算式中的 8 個數字不同，沒有 1 和 9。

所以，“奥运会”所代表的三位整數是 647、638 和 836。（5 分）

評分參考：① 能給出全部推斷過程，分析正確，每步驟給 5 分；② 推理正確，分析合理，但計算錯誤，適當減分；③ 僅給出正確答案，給 5 分。