

總分	
----	--

第十一屆全國“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

決賽試卷（初一組）

（時間 2006 年 4 月 22 日 10：00～11：30）

一. 填空(每題 10 分，共 80 分)

1. 計算： $\left\{1 - \left[\frac{3}{16} - (-0.25)^2\right] \times (-2)^4\right\} \div \left[3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) + 5 \div (-2)^3\right] = (\quad)$.
2. 當 $m = 2\pi$ 時，多項式 $am^3 + bm + 1$ 的值是 0，則多項式 $4a\pi^3 + b\pi + 5\frac{1}{2} = (\quad)$.
3. 將若干本書分給幾名小朋友，如果每人分 4 本書，就還餘下 20 本書，如果每人分 8 本書，會餘下 1 名小朋友雖然分到了一些書，但是不足 8 本，則共有()名小朋友.
4. 圖 1 中的長方形 $ABCD$ 是由四個等腰直角三角形和一個正方形 $EFGH$ 拼成. 已知長方形 $ABCD$ 的面積為 120 平方釐米，則正方形 $EFGH$ 的面積等於()平方釐米.
5. 滿足方程 $\|x - 2006| - 1| + 8| = 2006$ 的所有 x 的和為() .
6. 一個存有一些水的水池，有一個進水口和若干個口徑相同的出水口，進水口每分鐘進水 3 立方米. 若同時打開進水口和三個出水口，池中水 16 分鐘放完；若同時打開進水口與五個出水口，池中水 9 分鐘放完. 池中原有水() 立方米.
7. 已知 $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{k}{2^k} + \dots + \frac{2005}{2^{2005}} - \frac{2006}{2^{2006}}$ ，則小於 S 的最大的整數是() .
8. 如圖 2，數軸上標有 $2n + 1$ 個點，它們對應的整數是：

$$-n, -(n-1), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1, n.$$

為了確保從這些點中可以取出 2006 個，其中任何兩個點之間的距離都不等於 4，則 n 的最小值是() .

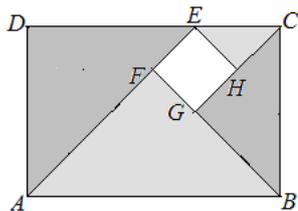


圖 1

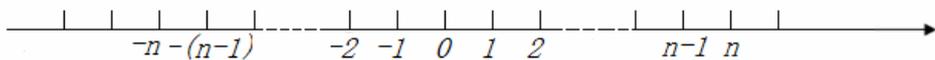


圖 2

裝
 訂
 線
 考號
 姓名
 學校

二. 解答下列各題, 要求寫出簡要過程(每題10分, 共40分)

9. 如圖 3, $ABCD$ 是矩形, $BC = 6$ 釐米, $AB = 10$ 釐米, AC 和 BD 是對角線. 圖中的陰影部分以 CD 為軸旋轉一周, 則陰影部分掃過的立體的體積是多少立方釐米? (π 取 3.14)

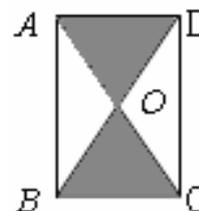


圖 3

10. 將 21 個整數:

$$-10, -9, -8, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10$$

分爲個數不相等的六組數, 分別計算各組的平均值, 那麼這六個平均值的和最大是多少?

11. 當 $m = -5, -4, -3, -1, 0, 1, 3, 23, 124, 1000$ 時, 從等式 $(2m+1)x + (2-3m)y + 1 - 5m = 0$ 可以得到 10 個關於 x 和 y 的二元一次方程, 問這 10 個方程有沒有公共解? 如果有, 求出這些公共解.
12. 平面上有 5 條直線, 其中任意兩條都不平行, 那麼在這 5 條直線兩兩相交所成的角中, 至少有一個角不超過 36 度, 請說明理由.

三. 解答下列各題, 要求寫出詳細過程 (每題15分, 共30分)

13. 如圖 4, A 、 B 和 C 是圓周的三等分點, 甲、乙、丙三隻螞蟻分別從 A 、 B 、 C 三個點同時出發, 甲和乙沿圓周逆時針爬行, 丙順時針爬行. 已知甲、乙、丙三隻螞蟻爬行的速度之比是 8:6:5, 求出三隻螞蟻所有的會合地點.

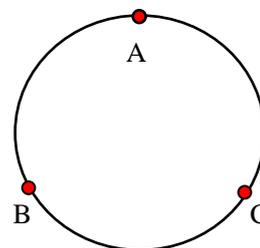


圖 4

14. 已知 m, n 都是正整數, 並且

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

① 證明: $A = \frac{m+1}{2m}$, $B = \frac{n+1}{2n}$;

② 若 $A - B = \frac{1}{26}$, 求 m 和 n 的值.