第十一屆全國“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

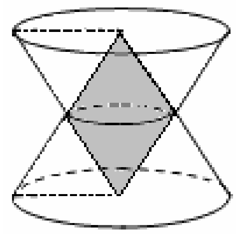
決賽參考答案（初一組）

一. **填空** (每題 10 分，共 80 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{4}{7}$	5	6	10	4012	288	0	2005

二. **解答下列各題, 要求寫出簡要過程** (每題10分，共40分)

9　**解:** ① 設三角形 BCO 以 CD 爲軸旋轉一周所得到的立體的體積是 S，S 等於高爲 10 釐米，底面半徑是 6 釐米的圓錐的體積減去 2 個高爲 5 釐米，底面半徑是 3 釐米的圓錐的體積. 所以



② $2S=2\left(\frac{1}{3}\times 6^2\times 10\times \pi-2\times \frac{1}{3}\times 3^2\times 5\times \pi\right)=180\pi=565.2$ (立方釐米).

答：體積是 565.2 立方釐米.

評分參考：①能判斷出旋轉所得到的立體的形狀或畫出上右圖（5 分）；② 正確計算圓錐的體積（5 分）. 或有②給 10 分，僅有正確答案給 5 分

10　**解:** ① 分爲個數不相等的 6 組，整數的個數分別爲 1、2、3、4、5、6.

② 應當將數值大的分在整數個數少的組中.所以，可以如下分組：

第一组　10
第二组　9　8
第三组　7　6　5
第四组　4　3　2　1
第五组　0　−1　−2　−3　−4
第六组　−5　−6　−7　−8　−9　−10

③ 計算它們的平均值的和：

$$\frac{10}{1}+\frac{9+8}{2}+\frac{7+6+5}{3}+\frac{4+3+2+1}{4}+\frac{0-1-2-3-4}{5}+\frac{-5-6-7-8-9-10}{6}=17\frac{1}{2}.$$

答：最大的和是$17\frac{1}{2}$.

評分參考：①正確判斷各組整數的個數（2 分）； ② 正確將整數分到各組（2 分）；③ 正確求出最大平均值（4 分）；或有③給 10 分，僅有正確答案給 5 分

11　**解**：①分別取$m=0$和$m=1$，得到兩個方程：

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3x-y-4=0 \end{cases}$$

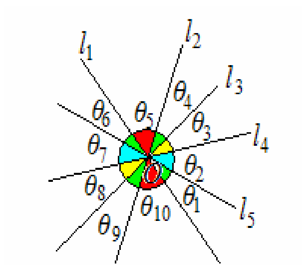
先求兩個方程的公共解，把它們看作二元一次方程組，解得：$x=1,\quad y=-1$.

② 把$x=1,\quad y=-1$代入$(2m+1)x+(2-3m)y+1-5m$，值恒爲 0. 此即意味著：當$m=-5,-4,-3,-1,0,1,3,23,124,1000$時，$(2m+1)x+(2-3m)y+1-5m=0$成立.所以，$x=1,\quad y=-1$是對應的 10 個方程的的公共解.

答：這些方程的公共解是 $x=1,\quad y=-1$.

評分參考：① 能對 m 的特殊值求出公共解（5 分）；② 討論一般情況（給 5 分）.

12　**解答**：① 在平面上任取一點 O，過 O 點作已知的 5 條直線的平行線 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5.

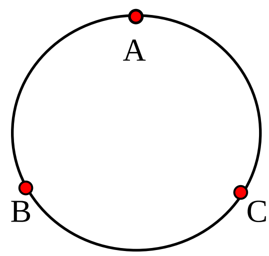


② 將 O 爲中心的周角分爲 10 個彼此依次相鄰的小的角，這 10 個小角的和恰等於360°，所以，至少有一個小角不超過36°.

評分參考：① 關鍵是能判斷出 5 條直線的 10 个小角的和是 360 度，（ 5 分）；② 其餘步驟（5 分）.

三．解答下列各題，要求寫出詳細過程（每題15分，共30分）

13　**解**：



① 設圓周周長爲$3L$，甲、乙、丙的速度分別爲$8v$、$6v$、$5v$；

②

甲第一次追上乙時爬行的時間＝$\dfrac{L}{8v-6v}=\dfrac{L}{2v}$,

甲第一次追上乙時爬行的路程＝$\dfrac{L}{2v}8v=4L$，

甲第 k+1 次追上乙時爬行的時間＝$\dfrac{L}{2v}+\dfrac{3kL}{2v}$，

甲第 k+1 次追上乙時爬行的路程＝$\left(\dfrac{L}{2v}+\dfrac{3kL}{2v}\right)\times 8v=L+3\times(1+4k)L$，

因爲$3\times(1+4k)L$是圓周周長的整數倍，所以，甲總在 B 點追上乙.

③ 在時刻$\dfrac{L}{2v}+\dfrac{3kL}{2v}$，丙爬行的路程＝$\left(\dfrac{L}{2v}+\dfrac{3kL}{2v}\right)\times 5v=3L+6kL+\left(\dfrac{3k}{2}-\dfrac{1}{2}\right)L$，

當 k＝1 時，上式是$\left(\dfrac{L}{2v}+\dfrac{3kL}{2v}\right)\times 5v=9L+L$.因爲丙是從 C 出發順時針爬行，所以，丙爬行至 B 處，意味甲、乙、丙能夠在 B 點會合.

答；甲、乙、丙僅僅在 B 處匯合.

評分參考：① 會用字母表示圓的周長和速度（5 分）；②甲追上乙 1 次的時間（4 分），

甲追上乙的位置（3 分）;③ 會判斷丙在甲追上乙的時刻所爬行的距離（3 分）.

14　解：①

$$A=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{m})(1+\frac{1}{m})$$
$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{m})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{m})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{m-1}{m}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{m+1}{m}=\frac{m+1}{2m};$$

同樣，$B=\dfrac{n+1}{2n}$

② 由題設，

$$A-B=\frac{m+1}{2m}-\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2m}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{26}，\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{13}，\quad \frac{1}{m}=\frac{1}{n}+\frac{1}{13}=\frac{13+n}{13n}，$$

所以，

$$m=\frac{13n}{13+n},$$

$$m=\frac{13n}{13+n}=\frac{13(n+13-13)}{13+n}=13-\frac{13\times13}{13+n},$$

即 $13+n$ 是 13×13 的因數，13×13 只有 3 個因數：1，13，13^2.所以，

$$13+n=13^2，n=13^2-13=156,\qquad m=12.$$

<u>求出正整數**m, n**另一方法</u>:

$$A-B=\frac{m+1}{2m}-\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2m}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{26}，\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{13}.$$

設 $m=Ka,\ \ n=Kb,\ \ (a,b)=1$，代入上式，

$$\frac{1}{Ka}-\frac{1}{Kb}=\frac{b-a}{Kab}=\frac{1}{13}.$$

$(b-a)$ 和 a,b 都互質，一定整除 K .記 $d=\dfrac{K}{b-a}$ 是正整數，$b>a$ 則有

$$\frac{1}{dab}=\frac{1}{13}.$$

由上式和 $b>a$，$b=13,a=1,\ \ d=1$. 所以，$K=12$，m 和 n 有唯一解，$m=13,n=156$.

答： $m=13,n=156$.

評分參考：①（6 分）; ②（共 9 分，分步酌情給分）.

特別說明：因爲各題的解答未必唯一，上述解答和評分僅供參考.