

第十屆全國“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

決賽試題答案，小學組

一. 填空(每題 10 分，共 80 分)

第 1 小題：

西元曆	2005	1985	1910
希伯萊曆	5766	5746	5671
伊斯蘭曆	1427	1407	1332
印度曆	1927	1907	1832

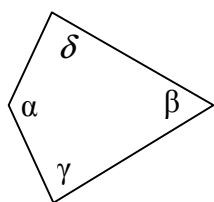
第 2-8 小題：

題號	答案	題號	答案
1	見上表	5	$\frac{5}{6}$
2	10.695; 1	6	13; 3
3	17	7	20; 45
4	102	8	60

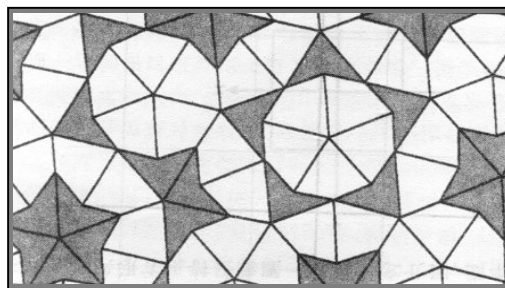
【評分參考】第 1 小題，錯 1 空，扣 1.5 分；第 2-8 小題中若有兩空，每空 5 分。

二. 解答下列各題，要求寫出簡要過程 (每題 10 分，共 40 分)

9. 解：



風箏形



如圖案所示， $\gamma = \delta$ ，5 個風箏形拼成一個正 10 邊形，所以，

$$\alpha = (10 - 2) \times 180 \div 10 = 8 \times 18 = 144 \text{ 度，}$$

$$5\beta = 360 \text{ (度)，} \beta = 72 \text{ (度)。}$$

風箏形是個四邊形，內角和是 360 度，並且 $\gamma = \delta$ ，所以，

$$\gamma = (360 - 144 - 72) \div 2 = 72 \text{ (度)。}$$

答：在風箏形中，有一個是鈍角，是 144 度，其他三個角都是 72 度。

第十屆全國華羅庚金杯少年數學邀請賽決賽小學組賽題答案

【說明】 在正式出版試題解答時，將給出本題 $\gamma = \delta$ ，5 個風箏形拼成的圖形是一個正 10 邊形的嚴格的證明。

【評分參考】 角度回答正確，6 分；理由正確，4 分。

10. 解答：

① 這 7 個數是 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10；

② 將這 10 個自然數分為三組：偶數 2, 4, 6, 8, 10 為第一組；3, 9 為第二組；5, 7, 11 為第三組。顯然，第一和第二組每組至多只能選出 1 個數，第三組的 3 個自然數兩兩互質，最多能選 3 個。例如：2、3、5、7、11 就兩兩互質。所以從 2、3、4、5、6、7、8、9、10 和 11 最多可以選出 5 個數，這 5 個自然數兩兩互質。

【評分參考】 ① 正確，給 4 分；② 答案 5 正確，給 4 分，理由陳述正確，給 2 分。

11. 解：① 以長為 3 的直角邊為軸旋轉得到的是一個圓錐，體積 $V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$ ；

② 以長為 4 的直角邊為軸旋轉得到的立體也是圓錐，體積 $V_4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ ；

③ 以長為 5 的斜邊為軸旋轉得到的立體是由兩個圓錐底面上下疊合在一起組成的紡錐體。設兩個圓錐的高為 h_1 和 h_2 ，則有 $h_1 + h_2 = 5$ ，設底面的半徑是 h ，它是直角三角形斜邊上的高，由直角三角形面積公式：

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4, \quad \therefore h = \frac{12}{5},$$

④ 再由圓錐的體積公式計算紡錐體的體積應當是：

$$V_5 = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3}\pi h^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{48}{5}\pi.$$

⑤ 既然 $16\pi > 12\pi > \frac{48}{5}\pi$ ， $16\pi : \frac{48}{5}\pi = \frac{5}{3}$ 。

答：最大的體積和最小的體積的比是 $\frac{5}{3}$ 。

【評分參考】 每步 2 分。

12. 解：

① 艦模從 A 碼頭順流而下 960 米，航行時間 $= \frac{960}{200 + 40} = 4$ 分， $20 - 4 = 16$ (分)。因此，艦模出發後第 16 分鐘又回到 A 碼頭。

② 既然艦模出發後第 16 分鐘又回到 A 碼頭，所以，在這 16 分鐘中，艦模順流行駛的路程與逆流行駛的路程相同。設在 16 分鐘中，艦模順流航行的時間為 t ，逆流航行的時間是 $16 - t$ ，順流航行的速度是 $200 + 40 = 240$ 米/分，逆流航行的速度是 $200 - 40 = 160$ 米/分，應當有

$$240 \times t = 160 \times (16 - t), \quad t = 6.4 \text{ (分)}.$$

③ 因此，出發 20 分鐘後艦模的總的航程是

$$6.4 \times 240 + (16 - 6.4) \times 160 + 960 = 4032 \text{ (米)}$$

第十屆全國華羅庚金杯少年數學邀請賽決賽小學組賽題答案

④ 設兩個碼頭的距離是 L 米，則有，

$$4032 = 2mL + 960, m \text{ 是整數 } ,$$

$$m = \frac{4032 - 960}{2L} = \frac{1536}{L} ,$$

由於， $L > 960$ 。所以， $1 \leq m = \frac{1536}{L} < \frac{1536}{960} = 1.6$ ，即 $m = 1$ ， $L = 1536$ 米。

答：兩個碼頭的距離是 1536 米。

【評分參考】①能計算出艦模出發後第 16 分鐘又回到 A 碼頭，2 分；②計算出順流航行的時間，4 分；③計算出艦模總的航程，2 分；④計算出兩個碼頭的距離，2 分。

三. 解答下列各題，要求寫出詳細過程 (每題 15 分，共 30 分)

13. 解：設 $A = ka, B = kb$ ， $(a, b) = 1$ ，即有

$$\frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} = \frac{a+b}{k \times a \times b} ,$$

因為 $(a, b) = 1$ ，所以有 $(a+b, b) = 1$ 和 $(a, a+b) = 1$ ，只能有 $a+b$ 整除 k 。設 $k = m \times (a+b)$ ，則有

$$A = m \times (a+b) \times a, B = m \times (a+b) \times b, \\ A + B = m \times (a+b)^2$$

因為

$$\frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{m \times (a+b) \times a} + \frac{1}{m \times (a+b) \times b} = \frac{1}{m \times a \times b} ,$$

上式意味著 m, a, b 必須是 15 的約數。考慮到交換 a 和 b 的取值，不改變 $A+B$ 的值。所以 m, a, b 可能的取值和 $A+B$ 的值是：

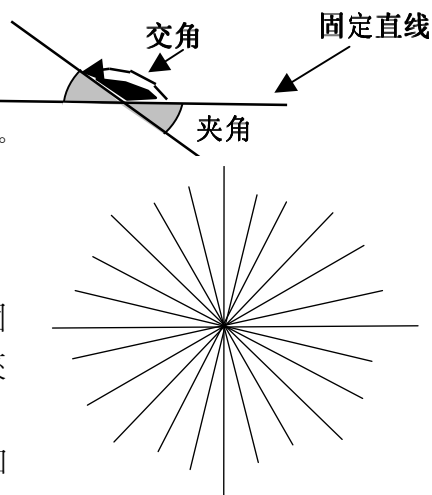
m	1	1	3	5	15
a	3	1	1	1	1
b	5	15	5	3	1
$A+B$	64	256	108	80	60

答： $A+B$ 的最大值是 256。

【評分參考】答案正確，6 分，推理正確，即能列出 $A+B$ 的 5 種取值，給 9 分。

14. 解答：

- ◆ 固定平面上的一條直線，其他直線與此條固定直線的交角自這條固定直線起逆時針計算，只能是 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75° 、 90° 、 105° 、 120° 、 135° 、 150° 、 165° 十一種角度之一，所以，平面上最多有 12 條直線。否則，必有兩條直線平行。



- ◆ 如右圖，將所有直線做平行移動，使它們交於同一個點，這樣的平行移動顯然不改變兩條直線的“夾角”。無妨設其中一條直線水準，從水準直線開始，逆時針將 12 條直線分別記為第一條、第二條、……和第十二條直線。

(1) 第二條至第十二條直線與第一條直線的“夾角”和是：
 $15+30+45+60+75+90+75+60+45+30+15=540$ (度)；

(2) 第三條至第十二條直線與第二條直線相交的“夾角”和是：
 $15+30+45+60+75+90+75+60+45+30= (540-15)$ (度)；

(3) 第四條至第十二條直線與第三條直線相交的“夾角”和是：
 $15+30+45+60+75+90+75+60+45= (540-15-30)$ (度)；

……；

(10) 第十一條和第十二條直線與第十條直線相交的“夾角”和是： $(30+15)$ (度)

(11) 第十二條直線與第十一條直線相交的“夾角”和是： 15 (度)；

- ◆ 將(2)和(11)、(3)和(10)、(4)和(9)、(5)和(8)、(6)和(7)配對，得到所有的“夾角”之和是
 $6 \times 540 = 3240$ (度)。

【評分參考】：第 1 問答案正確，給 5 分；第 2 問中，能完成②，給 8 分，能求出“夾角”的總和，給 2 分。